REFUERZO MATEMÁTICAS II

Bloque II: Geometría

CÁLCULO DE VECTORES

Recuerda:

- **Cálculo de las coordenadas de un vector que va de un punto A a un punto B:**

$$\begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) \\ B = (b_1, b_2, b_3) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$\begin{cases} A = (1, 0, -1) \\ B = (0, -2, 2) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \big(0 - 1, -2 - 0, 2 - (-1)\big) = (-1, -2, 3)$$

- **Cálculo del vector unitario de un vector v:**

$$\begin{cases} \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ |\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{U_v} = \left(\frac{v_1}{|\vec{v}|}, \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \frac{v_3}{|\vec{v}|}\right)$$

$$\begin{cases} \vec{v} = (1, -1, 2) \\ |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{8} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{U_v} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{-1}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}\right)$$

1. Se consideran los puntos A = (1, -1, 0); B = (-1, -2, -1) y C = (1, 0, 1), calcular:

a) $\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{BA}$
c) $\overrightarrow{AC}$
d) $\overrightarrow{CA}$
e) $\overrightarrow{BC}$
f) $\overrightarrow{CB}$

2. Hallar los módulos de los vectores del ejercicio 1.

3. Calcular los vectores unitarios del ejercicio 1.

OPERACIONES CON VECTORES. PRODUCTO ESCALAR

Recuerda:

- **El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se calcula:**

$$\begin{cases}\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\alpha\ \begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}\\ |\vec{v}|=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{u}=(1,-1,0)\\ \vec{v}=(1,-1,2)\end{cases}\rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 2=2$$

- **Cálculo del ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:**

$$\begin{cases}\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\alpha\ \begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}\\ |\vec{v}|=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+v_3{}^2}\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{u}=(1,-1,0)\\ \vec{v}=(1,-1,2)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}\\ |\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{8}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 2=2\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\alpha\end{cases}$$

$$cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\rightarrow\alpha=cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)=cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}\right)=$$

- **Cálculo de la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$:**

$$\begin{cases}\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\end{cases}\rightarrow Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\begin{cases}\vec{u}=(1,-1,0)\\ \vec{v}=(1,-1,2)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+0\cdot 2=2\\ |\vec{v}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{8}\end{cases}\rightarrow Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}}=\frac{2}{\sqrt{8}}$$

1. Dados los vectores $\vec{u}=(0,2,-1)$, $\vec{v}=(3,-1,2)$ y $\vec{w}=(1,-1,1)$, calcular:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b) $\vec{u}\cdot\vec{w}$
c) $\vec{v}\cdot\vec{w}$

2. Calcular el ángulo que forman los vectores anteriores e indicar si son ortogonales.

3. Dados los vectores $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = -1$ y $|\vec{w}| = \sqrt{2}$ y sabiendo que el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de 45º ($\alpha = \widehat{u,v} = 45°$), que el ángulo que forman los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$ es de 90º ($\beta = \widehat{w,v} = 90°$), y que el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y w es de 0º ($\theta = \widehat{u,w} = 0°$), calcular:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
b) $\vec{u} \cdot \vec{w}$
c) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

4. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, -1, 2)$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$, calcular:

a) Un vector perpendicular al vector $\vec{u}$.
b) Un vector perpendicular al vector $\vec{v}$.
c) Un vector perpendicular al vector $\vec{w}$.
d) Un vector perpendicular al vector $\vec{u}$ que sea unitario.
e) Un vector perpendicular al vector $\vec{v}$ que sea unitario.
f) Un vector perpendicular al vector $\vec{w}$ que sea unitario.

5. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, -1, 2)$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$, calcular:

g) $Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}}$
h) $Proy_{\vec{u}}^{\vec{v}}$
i) $Proy_{\vec{w}}^{\vec{u}}$
j) $Proy_{\vec{u}}^{\vec{w}}$

OPERACIONES CON VECTORES. PRODUCTO VECTORIAL

Recuerda:

- **El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ se calcula:**

$$\begin{cases}\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\end{cases} \to \vec{u}\,x\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}\vec{u}=(1,-1,0)\\ \vec{v}=(1,-1,2)\end{cases} \to \vec{u}\,x\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+0\vec{k}=(-2,-2,0)$$

- **El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es un vector perpendicular a los mismos.**

- **Cálculo del área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$:**

$$\begin{cases}\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\end{cases} \to A_p=|\vec{u}\,x\,\vec{v}|$$

$$\begin{cases}\vec{u}=(1,-1,0)\\ \vec{v}=(1,-1,2)\end{cases} \to \vec{u}\,x\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+0\vec{k}=(-2,-2,0)$$

$$A_p=|\vec{u}\,x\,\vec{v}|=|(-2,-2,0)|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{8}\ uds^2$$

- **Cálculo del área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$:**

$$\begin{cases}\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\end{cases} \to A_t=\frac{|\vec{u}\,x\,\vec{v}|}{2}$$

$$\begin{cases}\vec{u}=(1,-1,0)\\ \vec{v}=(1,-1,2)\end{cases} \to \vec{u}\,x\,\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+0\vec{k}=(-2,-2,0)$$

$$A_t=\frac{|\vec{u}\,x\,\vec{v}|}{2}=\frac{|(-2,-2,0)|}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,uds^2$$

1. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, -1, 2)$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$, calcular:

a) $\vec{u}\, x\, \vec{v}$
b) $\vec{u}\, x\, \vec{w}$
c) $\vec{v}\, x\, \vec{w}$

2. Dados los vectores $\vec{u} = (0, 2, -1)$, $\vec{v} = (3, -1, 2)$ y $\vec{w} = (1, -1, 1)$, calcular:

a) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.
b) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{w}$.
c) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{v}\ y\ \vec{w}$.
d) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ que sea unitario.
e) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{w}$ que sea unitario.
f) Un vector perpendicular a los vectores $\vec{v}\ y\ \vec{w}$ que sea unitario.

3. Calcular el área del paralelogramo formado por los vectores:

a) $\vec{u}\ y\ \vec{v}$
b) $\vec{u}\ y\ \vec{w}$
c) $\vec{v}\ y\ \vec{w}$

4. Calcular el área del triángulo formado por los vectores:

a) $\vec{u}\ y\ \vec{v}$
b) $\vec{u}\ y\ \vec{w}$
c) $\vec{v}\ y\ \vec{w}$

OPERACIONES CON VECTORES. PRODUCTO MIXTO

Recuerda:

- **El producto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$ se calcula:**

$$\begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{cases} \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v}\, x\, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{u} = (1, -1, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 2) \\ \vec{w} = (-1, 0, -2) \end{cases} \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v}\, x\, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

- **Cálculo del volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$:**

$$\begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{cases} \rightarrow V_p = |\vec{u} \cdot (\vec{v}\, x\, \vec{w})|$$

$$\begin{cases} \vec{u} = (1, -1, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 2) \\ \vec{w} = (-1, 0, -2) \end{cases} \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v}\, x\, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$V_p = |\vec{u} \cdot (\vec{v}\, x\, \vec{w})| = |2| = 2\ \ uds^3$$

- **Cálculo del volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$:**

$$\begin{cases} \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \end{cases} \rightarrow V_t = \frac{|\vec{u} \cdot (\vec{v}\, x\, \vec{w})|}{6}$$

$$\begin{cases} \vec{u} = (1, -1, 0) \\ \vec{v} = (1, -1, 2) \\ \vec{w} = (-1, 0, -2) \end{cases} \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{v}\, x\, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$V_p = \frac{|\vec{u} \cdot (\vec{v}\, x\, \vec{w})|}{6} = \frac{|2|}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ uds^3$$

1. Dados los vectores $\vec{u}=(0,2,-1)$, $\vec{v}=(3,-1,2)$, $\vec{w}=(1,-1,0)$ y $\vec{s}=(-1,-1,-1)$, calcular:

a) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w})$
b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{s})$
c) $\vec{s}\cdot(\vec{v}\,x\,\vec{w})$

2. Calcular el volumen del paralelepípedo formado por los vectores:

a) $\vec{u},\vec{v}\;y\;\vec{w}$
b) $\vec{u},\vec{w}\;y\;\vec{s}$
c) $\vec{s},\vec{w}\,y\;\vec{v}$

3. Calcular el volumen del tetraedro formado por los vectores:

a) $\vec{u},\vec{v}\;y\;\vec{w}$
b) $\vec{u},\vec{w}\;y\;\vec{s}$
c) $\vec{s},\vec{w}\,y\;\vec{v}$