

## OPCIÓN A

A.1. Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real  $a$  para los cuales la matriz  $A$  tiene inversa.

Para averiguar cuándo la matriz dada tiene inversa, se debe calcular  $|A| \neq 0$ ; y, sobre eso, despejar el parámetro  $a$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = -2a + a - 1 = -a - 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

Solución:

- Caso 1: si  $a \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$
- Caso 2: si  $a = -1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \nexists A^{-1}$

b) Para  $a=2$  calcule, si existe, la matriz  $X$  que satisface  $AX=B$ .

Para resolver la ecuación matricial dada, puede plantearse asignando valores paramétricos a la matriz  $X$ :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sobre esto, se reemplazan las matrices en la ecuación:

$$AX = B \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ -x + 2y \\ -2y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ -x + 2y = 1 \\ -2y - z = -1 \end{cases} \rightarrow [x = 2y - 1] \rightarrow \begin{cases} 2[2y - 1] + y + z = -2 \\ -2y - z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5y + z = 0 \\ -2y - z = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5y + z = 0 \rightarrow [z = -5y] \\ -2y - z = -1 \end{cases} \rightarrow -2y - [-5y] = -1 \rightarrow 3y = -1 \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Solución:  $(x, y, z) = (-5/3; -1/3; 5/3)$

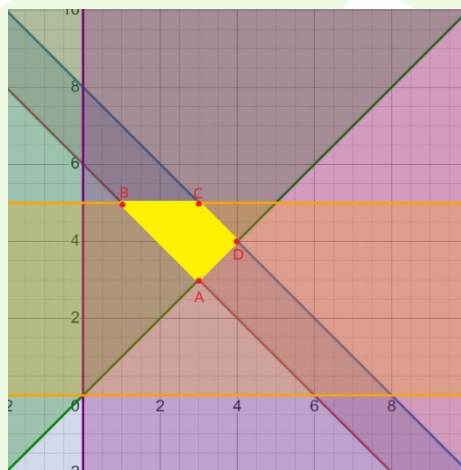
A.2. Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros; y, debido al coste de producción, no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual que la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.

En primer lugar, es necesario plantear el problema, teniendo en cuenta cuál es cada variable ( $x$ : A2020,  $y$  = B2020):

$$\begin{aligned} \text{Min } C(x, y) &= 2x + 0,5y \\ \text{s. a.:} \\ x + y &\geq 6 \\ x + y &\leq 8 \\ y &\geq x \\ x &\geq 0 \\ 0 &\leq y \leq 5 \end{aligned}$$

Solución: la región factible será:



b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

Ya conocida la región factible, lo siguiente es determinar los vértices de la misma:

$$A = (1,5) \quad B = (3,5) \quad C = (3,3) \quad D = (4,4)$$

Finalmente, conocidas las coordenadas, se reemplaza cada una en la función objetivo. La solución que satisfará el objetivo del problema (minimizar el coste) será aquella que dé el menor resultado:

$$\begin{aligned} C_A(1,5) &= 2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 5 = 4,5 \\ C_B(3,5) &= 2 \cdot 3 + 0,5 \cdot 5 = 8,5 \\ C_C(3,3) &= 2 \cdot 3 + 0,5 \cdot 3 = 7,5 \\ C_D(4,4) &= 2 \cdot 4 + 0,5 \cdot 4 = 10 \end{aligned}$$

Solución: El coste mínimo se obtendrá produciendo 1000 metros del modelo A2020 y 5000 metros del modelo B2020, lográndose un coste de 4,5€

A.3. Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{3a}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- a) Determine el valor del parámetro real  $a$  para que la función  $f(x)$  sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de  $a$ , es  $f(x)$  derivable?

Para comprobar la continuidad de la función es necesario forzar que se cumpla la definición de continuidad:

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow 5 = a$$

**Solución:** Para que la función sea continua,  $a$  deberá valer 5.

Para comprobar si la función es derivable en  $a = 5$ , debe comprobarse la definición de derivabilidad. En primer lugar, se calcula la derivada de la función:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ -\frac{15}{x^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) \rightarrow 5 = 5 \neq -\frac{15}{9}$$

**Solución:** Dado que los límites laterales no coinciden, la función no es derivable.

- b) Para  $a = 1$ , calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa  $x = 1$ :

En primer lugar, se calcula el valor de  $y$ :  $f(1) = -1 \rightarrow y = -1$

A continuación, se calcula el valor de  $m$ :  $\left\{ \begin{matrix} f'(x) = 2x - 1 \\ x = 1 \end{matrix} \right. \rightarrow f'(1) = 1 \rightarrow m = 1$

Seguidamente, se reemplazan los valores de  $x$ ,  $y$ , y  $m$  en la ecuación general de la recta:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y + 1 = x - 1$$

Por último, a partir de la ecuación general de la recta, se crea la ecuación de la recta tangente:

$$y + 1 = x - 1 \rightarrow y = -x - 2$$

**Solución:** La ecuación de la recta tangente será  $y = -x - 2$

A.4. Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A) = 0'5; P(\bar{B}) = 0'8; \text{ y } P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0'9$$

- a) Estudie si los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes.

Para que los sucesos sean independientes, es necesario que se cumpla que  $P(B|A) = P(B)$ :

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - 0,9 = 0,1$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A) \rightarrow P(A) = \frac{0'1}{0'5} = 0'2 \rightarrow P(B|A) = 0'2 = P(B)$$

**Solución:** Como se cumple que  $P(B|A) = 0'2 = P(B)$ , los sucesos  $A$  y  $B$  son independientes.

b) Calcule  $P(\bar{A}|\bar{B})$ .

Para calcular  $P(\bar{A}|\bar{B})$  se desarrollará de la siguiente manera:

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{0'8} = \frac{1 - 0'6}{0'8} = 0'5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = 0'5 + 0'2 - 0'1 = 0'6$$

Solución:  $P(\bar{A}|\bar{B}) = 0'6$

A.5. El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media  $\mu$  gramos y desviación típica  $\sigma = 8$  gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza del 95% para  $\mu$ .

El intervalo de confianza para la media se planteará de la siguiente manera:

$$IC_{1-\alpha}(\bar{x}) = \left( \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow IC_{1-0'95}(\bar{x}) = \left( 60 \pm 1'96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} \right) = (60 \pm 3'51) = (56'49; 63'51)$$

Solución: El peso medio está comprendido entre 56'49 gramos y 63'51 gramos, con una confianza del 95%.

NOTA: Para averiguar el valor de  $z_{\alpha/2}$  se realiza la siguiente secuencia:

$$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

b) Suponga que  $\mu = 59$  gramos. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral,  $\bar{X}$ , esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

Para averiguar la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 57 y 61 gramos se deberá tipificar la media de la variable:

$$\begin{aligned} P(57 \leq \bar{X} \leq 61) &= P(\bar{X} \leq 61) - P(\bar{X} \leq 57) = P\left(z \leq \frac{61 - 59}{\frac{8}{\sqrt{10}}}\right) - P\left(z \leq \frac{57 - 59}{\frac{8}{\sqrt{10}}}\right) = \\ &= P(z \leq 0'79) - P(z \leq -0'79) = P(z \leq 0'79) - P(z \geq 0'79) = \\ &= P(z \leq 0'79) - [1 - P(z \leq 0'79)] = 0'7852 - (1 - 0'7852) = 0'5704 \end{aligned}$$

Solución: La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 57 gramos y 61 gramos es de un 57'04%.

## OPCIÓN B

B.1. Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real  $a$ .

Para discutir el sistema, se comienza primeramente calculando el determinante de la matriz  $A$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a + 1 - 2a = -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1$$

Solución:

Caso 1:  $a \neq 1$

$$\begin{cases} |A| \neq 0 \rightarrow RgA = 3 \\ |A^*| \neq 0 \rightarrow RgA^* = 3 \end{cases} \rightarrow RgA = RgA^* = n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow SCD$$

Caso 2:  $a = 1 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$

$$\begin{cases} |A| = 0 \rightarrow RgA < 3 \rightarrow |M_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow RgA = 2 \\ |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow RgA^* < 3 \rightarrow |M_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow RgA^* = 2 \end{cases} \rightarrow RgA = RgA^* < n^{\circ} \text{ incógnitas} \rightarrow SCI$$

b) Resuelva el sistema para  $a = 3$ .

Para  $a = 3$ , el sistema de ecuaciones quedará de la siguiente manera:

$$A^* = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Sobre esto, se resolverá utilizando el método de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Solución:  $(x, y, z) = (2, -1, 4)$

B.2. Se considera la función real de variable real  $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de  $f(x)$ .

Dominio:

Para estudiar el dominio, y considerando que la función es un cociente, es necesario verificar qué valores de  $x$  anulan al denominador:

$$(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

Solución:  $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

Asíntotas:

AV:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Solución: la función tiene asíntotas verticales en  $x = 1$

AH:

Solución:  $\nexists AH$  porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, lo que implica que, cuando se calcule el límite en  $\pm\infty$ , siempre dará  $\pm\infty$ .

AO:

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x} = 1 \rightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 2x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 - 2x + 1} = 0$$

Solución:  $y = x$

b) Determine sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, se calcularán los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x)(x-1)^2 - (x^3 - 2x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x(x^2 - 3x + 4)}{(x-1)^3} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x(x^2 - 3x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

Ya conocidos los puntos críticos, y junto con los valores del dominio, se verán, en la primera derivada, si la función crece ( $f'(x) > 0$ ) o decrece ( $f'(x) < 0$ ).

$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Creciente	Decreciente	Creciente

Solución: la función es creciente en los tramos  $(-\infty, 0)$  y  $(1, \infty)$ , y decreciente en el tramo  $(0, 1)$

B.3. Se sabe que la derivada de una función real  $f(x)$  de variable real es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

a) Determine la expresión de  $f(x)$  sabiendo que  $f(1) = 11$ .

$$\int (3x^2 + 8x)dx = x^3 + 4x^2 + c = f(x)$$

$$\begin{cases} f(1) = 11 \\ f(1) = 1 + 4 + c = 5 + c \end{cases} \rightarrow 5 + c = 11 \rightarrow c = 6$$

Solución: la expresión de  $f(x)$  es  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6$

b) Determine los máximos y mínimos de  $f(x)$ , si los hubiera.

Para determinar si la función tiene máximos o mínimos, primero se buscarán los puntos críticos de la función obteniendo los valores de  $x$  al igualar primera derivada a cero:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(3x + 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

A continuación, se calcula la segunda derivada de la función; y, sobre ésta, se reemplazarán los puntos críticos obtenidos en el cálculo anterior:

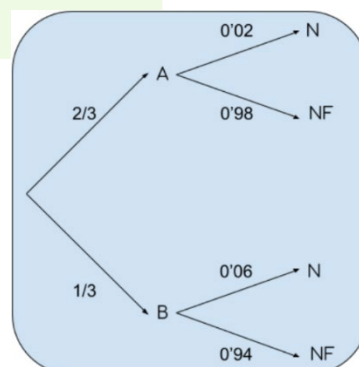
$$f''(x) = 6x + 8 \rightarrow \begin{cases} f''(0) = 8 > 0 \rightarrow \text{Mínimo} \\ f''(-\frac{8}{3}) = -8 < 0 \rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

Solución: la función tiene un mínimo en  $x = 0$ , y un máximo en  $x = -\frac{8}{3}$

B.4. Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos,  $A$  y  $B$ , siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio  $A$  el doble de los del municipio  $B$ . Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar, si se habita en el municipio  $A$ , es de 0'02; mientras que esa probabilidad, si se habita en el municipio  $B$ , es de 0'06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio, elegido al azar:

En primer lugar, es necesario plantear la información que se ha dado optando por un esquema de diagrama de árbol:

$A$ : ser residente en el municipio $A$	$F$ : sufrir fracaso escolar
$B$ : ser residente en el municipio $B$	$NF$ : No sufrir fracaso escolar



a) No sufra fracaso escolar.

$$P(NF) = P(A \cap NF) + P(B \cap NF) = P(A) \cdot P\left(\frac{NF}{A}\right) + P(B) \cdot P\left(\frac{NF}{B}\right) = \frac{2}{3} \cdot 0'98 + \frac{1}{3} \cdot 0'94 = 0'967$$

Solución: La probabilidad de no sufrir fracaso escolar es de un 96'7%

b) Sea del municipio A, si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \cdot P(F|A)}{1 - P(NF)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0'02}{1 - 0'967} = 0'404$$

Solución: La probabilidad de que, sabiendo que alguien ha sufrido fracaso escolar, sea del municipio A, es de un 40'4%

**B.5.** El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatorio con distribución normal de media  $\mu$  minutos, y desviación típica  $\sigma = 3$  minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de  $\mu$  sea menor de 1 minuto, con un nivel de confianza del 95%.

Para calcular el tamaño de la muestra se utilizará la fórmula del error de estimación, despejando el valor de  $n$ :

$$e = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e}\right)^2 \rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 3}{1}\right)^2 = 34'5744 \cong 35$$

NOTA: para calcular el valor de  $z_{\alpha/2}$  se obtiene de la siguiente manera:

$$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$$

Solución: el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 35 pruebas.

b) Suponga que  $\mu = 32$  minutos. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño  $n = 16$  pruebas, el tiempo medio empleado en su realización,  $\bar{X}$ , sea menor que 30'5 minutos.

Para calcular la probabilidad de que la media muestral sea menor de 30'5 minutos ( $\bar{x} < 30'5$ ), se recurrirá a la tipificación de la media de la variable:

$$\begin{aligned} P(\bar{x} < k) &= P\left(z < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(z < \frac{30'5 - 32}{\frac{3}{\sqrt{16}}}\right) = P(z < -2) = P(z > 2) = \\ &= 1 - P(z < 2) = 1 - 0,9772 = 0'0228 \end{aligned}$$

Solución: la probabilidad de que la media sea menor de 30'5 minutos es de un 2'28%