EXAMEN MATEMÁTICAS II

Universidad Complutense de Madrid

Convocatoria Ordinaria. Curso 2018-2019

OPCIÓN A

1.

a)

Estudiamos el rango de A en función de los valores del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$$

Primero buscamos un menor, de mayor orden posible, que sea distinto de cero. Posteriormente estudiamos los valores del parámetro para los cuales se anulan los menores orlados del menor elegido (menores que lo contienen).

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5 \neq 0 \rightarrow Menor\ de\ orden\ 2$$

$$|A|_2 \begin{cases} |A|_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow (a^2+2) - (-a+4) = 0 \rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \\ |A|_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 2-a \\ -1 & 2 & a-2 \end{vmatrix} \rightarrow |A| = 0 \rightarrow [a(a-2) + 2 - 3(2-a)] - [-a + 2(2-a) + 3(a-2)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = -2\ y\ a = 1 \\ (a^2 + a - 4) - (-2) = 0 \rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow a = -2\ y\ a = 1 \end{cases}$$

Conclusión:

- **Cuando $a \neq 1\ y\ a \neq -2 \rightarrow |A|_3 \neq 0 \rightarrow RgA = 3$**
- **Cuando $a = 1$ ó $a = -2 \rightarrow |A|_3 = 0 \rightarrow |A|_2 \neq 0 \rightarrow RgA = 2$**

b)

Calculamos $(AM)^{-1}$ cuando $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\ B^T}{|B|}$$

$$Adj\ B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Adj\ B^T = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\ y\ |B| = -2$$

Solución:

$$B^{-1} = \frac{Adj\ B^T}{|B|} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{5/2} & \mathbf{3/2} \end{pmatrix}$$

2.

a)

Dada la función:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Estudiamos si tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{0}{0} \to LH \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \to Hay\ una\ A.H.\, en\ y = 0\ en\ el\ intervalo\ (0, +\infty) \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \nexists \to El\ logarítmo\ no\ puede\ tomar\ valores\ negativos\ ni\ cero \end{cases}$$

b)

En este apartado queremos calcular las coordenadas de un punto de la curva f(x) donde la recta tangente a la misma en ese punto sea horizontal.

Dado que la recta es horizontal (pendiente nula), y sabiendo que la pendiente de la recta en un punto es la variación de la curva con respeto a x (derivada de la función en ese punto), obtenemos:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$En\ el\ punto\ P(x_0,y_0)\ de\ tangencia\rightarrow m=f'(x_0)=0\rightarrow\frac{1-\ln x_0}{{x_0}^2}=0$$

$$\frac{1-\ln x_0}{{x_0}^2}=0\rightarrow 1-\ln x_0=0\rightarrow\ln x_0=1\rightarrow x_0=e^1=e$$

$$\forall x_0=e\rightarrow y_0=f(x_0)=f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}\rightarrow Punto\ de\ tangencia{:}\ P\left(e,\frac{1}{e}\right)$$

Solución: El punto de tangencia a la curva, donde la recta es horizontal, es: $\boldsymbol{P\left(e,\frac{1}{e}\right)}$

A continuación analizamos si el punto P se trata de un extremo relativo, para ello estudiamos cómo se comporta la segunda derivada en dicho punto:

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\rightarrow f''(x)=\frac{\left(-\frac{1}{x}\cdot x^2\right)-[2x\cdot(1-\ln x)]}{x^4}=\frac{-3x+2x\cdot\ln x}{x^4}$$

$$P\left(e,\frac{1}{e}\right)\rightarrow x=e\rightarrow f''(e)=\frac{-3e+2e\cdot\ln e}{e^4}=-\frac{1}{e^3}<0\rightarrow Máximo\ relativo$$

Solución: Hay un máximo relativo en el punto $\boldsymbol{P\left(e,\frac{1}{e}\right)}$

c)

Antes de comenzar a calcular el área delimitada por la curva y la rectas y = 0 (eje x) y x = e, es conveniente estudiar los puntos donde la función corta al eje x.

$$Punto\ de\ corte\ de\ f(x)\ con\ el\ eje\ x\rightarrow y=0\rightarrow y=f(x)=\frac{\ln x}{x}=0\rightarrow\ln x=0\rightarrow x=e^0=1$$

Es decir, la función corta el eje x en el punto P(1, 0). Por lo tanto, el área que buscamos será el área comprendida entre la curva y el eje x en el intervalo $[0,1]$.

$$I=\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)dx=\frac{ln^2x}{2}\Big]_1^e=\frac{ln^2e}{2}-\frac{ln^21}{2}=\frac{1}{2}-0=\boldsymbol{\frac{1}{2}\ uds^2}$$

Solución: $\boldsymbol{I=\frac{1}{2}\ uds^2}$

3.

a)

De las rectas dadas sabemos:

$$Recta\ r \rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ P = (1,3,0) \end{cases}$$

$$Recta\ s \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1,0,-1) \\ Q = (2,-5,1) \end{cases}$$

Para estudiar su posición relativa estudiamos la posición de sus vectores directores:

$$Como\ \overrightarrow{u_r} \neq \overrightarrow{u_s} \begin{cases} Se\ cortan \rightarrow \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\ pertenecen\ al\ mismo\ plano \\ Se\ cruzan \rightarrow \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\ no\ pertenecen\ al\ mismo\ plano \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2,-5,1) - (1,3,0) = (1,-8,1)$$

$$[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2+0+8) - (2+0+16) = -8 \neq 0 \rightarrow Son\ vectores\ L.I.$$

$$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\ no\ pertenecen\ al\ mismo\ plano \rightarrow \boldsymbol{La\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}$$

b)

Dado que el plano contiene a la recta *s* y es paralelo a la recta *r,* podemos afirmar que los vectores directores de estas rectas serán vectores directores del plano, lo cual implica que podemos generar un vector normal al plano multiplicando vectorialmente $\overrightarrow{u_r}\ y\ \overrightarrow{u_s}$.

Por lo tanto, el plano que buscamos tiene las siguientes características:

$$Plano\ \alpha \begin{cases} \vec{n} = \overrightarrow{u_r}\ x\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,-2) \\ Q = (2,-5,1) \end{cases}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{u_r}\ x\ \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

$$\vec{n} = (2,1,-2)$$

La ecuación general del plano es:

$$\alpha \equiv ax + by + cz + d = 0 \begin{cases} \vec{n} = (2,1,-2) = (a,b,c) \\ Q = (2,-5,1) = (x,y,z) \end{cases}$$

$$\alpha \equiv 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) + (-2) \cdot 1 + d = 0 \rightarrow\ d = 3$$

Solución: El plano buscado tiene es: $\boldsymbol{\alpha \equiv 2x + y - 2z + 3 = 0}$

c)

En el caso de que el plano que sea perpendicular a la recta *r*, un vector normal al plano será el vector director de *r*.

$$Plano\ \beta \begin{cases} \vec{n} = \overrightarrow{u_r} = (2, -2, 1) \\ O = (0, 0, 0) \end{cases}$$

La ecuación general del plano β será:

$$\beta \equiv ax + by + cz + d = 0 \begin{cases} \vec{n} = (2, -2, 1) = (a, b, c) \\ O = (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases}$$

$$\beta \equiv 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + d = 0 \rightarrow d = 0$$

Solución: El plano buscado tiene es: $\boldsymbol{\beta \equiv 2x - 2y + z = 0}$

4.

a)

Definimos la variable aleatoria: X: Número de peces de una especie que sobreviven más de 5 años.

La variable X sigue una distribución binomial, ya que tiene un esquema éxito-fracaso.

$$X \rightarrow B(p, q) \begin{cases} Probabilidad\ de\ éxito \rightarrow p = 0{,}1 \\ Probabilidad\ de\ fracaso \rightarrow q = 1 - p = 0{,}9 \end{cases}$$

Dada una muestra de 10 peces (n = 10) queremos calcular la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

$$P(X = a) = \binom{n}{a} \cdot p^a \cdot q^{n-a} \rightarrow \binom{n}{a} = \frac{n!}{a!\,(n-a)!}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \begin{cases} P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10-0} \\ P(X = 1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{10-1} \end{cases}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [0{,}9^{10} + (10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^9)] = 0{,}2639 = \mathbf{26{,}39}\%$$

Solución: La probabilidad de que al menos dos de los peces sigan vivos dentro de 5 años es del $\mathbf{26{,}39}\%$.

b)

Aproximamos la distribución binomial a una distribución normal. Esta aproximación se puede realizar, ya que los productos np y nq son mayores que cero.

$$X \rightarrow B(p,q) \sim N(\mu,\sigma)\begin{cases} Media \rightarrow \ \mu = n \cdot p \\ Desviación\ típica \rightarrow \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \end{cases}$$

Como tenemos una muestra de 200 peces (n = 200), la distribución tendrá las siguientes características:

$$X \rightarrow N(\mu,\sigma) = N(20,\sqrt{18})\begin{cases} \mu = 200 \cdot 0{,}1 = 20 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{18} \end{cases}$$

La probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 peces será:

$$P(X \geq a) \rightarrow Tipificamos\ la\ variable\colon Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-20}{\sqrt{18}}$$

$$P(X \geq 10) = P\left(\frac{X-20}{\sqrt{18}} \geq \frac{10-20}{\sqrt{18}}\right) = P\left(Z \geq \frac{-10}{\sqrt{18}}\right) = P\left(Z \leq \frac{10}{\sqrt{18}}\right) = P(Z \leq 2{,}357) = 0{,}9934$$

NOTA: Para poder entrar en la tabla de distribución normal necesitamos expresar la probabilidad buscada de la forma $P(X < a)$.

Solución: La probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 peces es del 99,34%

OPCIÓN B

1.

Definimos las incógnitas:

X: Precio de un bocadillo (€)
Y: Precio de un refresco (€)
Z: Precio de una bolsa de patatas (€)

Con los datos facilitados en el enunciado planteamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} (3+1)x + 2y + (2+1)z = 19\text{ €} \\ 3x + 2y + 2z = 15\text{ €} \\ 0{,}6(x+y) = 3\text{€} \rightarrow x + y = 5\text{€} \end{cases}$$

Para plantear la última ecuación tenemos en cuenta que, como nos hacen un 40% de descuento del precio de un bocadillo y un refresco (x + y), pagamos un 60% del precio original.

Para calcular el precio de cada producto resolvemos el sistema anterior aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 19 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \\ 4 & 2 & 3 & 19 \end{pmatrix} \begin{cases} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \{F_3 - 2F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -y + 2z = 0 \\ -z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Solución: El precio de un bocadillo es 3€, el de un refresco es 2€ y el de una bolsa de patatas es de 1€.

2.

a)

Estudiamos el dominio de la función: $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$

Para que la función exista el radicando tiene que ser mayor o igual a cero, o lo que es lo mismo, no existe cuando el radicando es menor a cero.

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4} \rightarrow 4x^2 - x^4 < 0 \rightarrow x^2(4 - x^2) < 0 \rightarrow x^2(2 + x)(2 - x) < 0$$

$$x^2(2 + x)(2 - x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$$

Comprobamos para que valores de *x* se cumple la inecuación:

$\boldsymbol{x \in (-\infty,-2)}$	$\boldsymbol{x=-2}$	$\boldsymbol{x \in (-2,0)}$	$\boldsymbol{x=0}$	$\boldsymbol{x \in (0,2)}$	$\boldsymbol{x=2}$	$\boldsymbol{x \in (2,+\infty)}$
Cumple	No cumple	No cumple	No cumple	No cumple	No cumple	Cumple

Es decir, la función no existe cuando x toma cualquier valor del intervalo: $(-\infty,-\mathbf{2}) \cup (\mathbf{2},+\infty)$

Por lo que el domino de la función será**:** $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R} - \{(-\infty,-\mathbf{2}) \cup (\mathbf{2},+\infty)\} = [-\mathbf{2},\mathbf{2}]$

b)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento necesitamos establecer unos intervalos de estudio. Para ello tenemos en cuenta:

- Dominio de la función: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R} - \{(-\infty,-\mathbf{2}) \cup (\mathbf{2},+\infty)\} = [-\mathbf{2},\mathbf{2}]$
- Puntos críticos: Máximos y mínimos $\rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{2}\ y\ x = \pm 2$

$$f(x) = (4x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \left[\frac{1}{2}\cdot(4x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}-1}\right]\cdot(8x - 4x^3) = \frac{4x - 2x^3}{(4x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{(4x - 2x^3)\cdot(4x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}{4x^2 - x^4} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{(4x - 2x^3)\cdot(4x^2 - x^4)^{\frac{1}{2}}}{4x^2 - x^4} = 0$$

$$(4x - 2x^3)\cdot\sqrt{4x^2 - x^4} = 0\begin{cases} 4x - 2x^3 = 0 \rightarrow 2x(2 - x^2) = 0 \rightarrow x = 0\ y\ x = \pm\sqrt{2} \\ \sqrt{4x^2 - x^4} = 0 \rightarrow 4x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(4 - x^2) = 0 \rightarrow x = 0\ y\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Con los datos anteriores establecemos los siguientes intervalos:

$(-\mathbf{2},-\sqrt{\mathbf{2}})$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(-\sqrt{\mathbf{2}},\mathbf{0})$	$f'(x) = -/+ < 0$	La función es decreciente es este intervalo
$(\mathbf{0},\sqrt{\mathbf{2}})$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(\sqrt{\mathbf{2}},\mathbf{2})$	$f'(x) = -/+ < 0$	La función es decreciente es este intervalo

c)

Estudiamos los límites laterales dados:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}=\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{x}=\sqrt{4-x^2}\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{4-x^2}\approx\sqrt{4}=2\\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{4-x^2}\approx\sqrt{4}=-2\end{cases}$$

Como la función $\frac{f(x)}{x}$ sólo existe en el intervalo $[-\mathbf{2},\mathbf{2}]$, cuando $x\to0^+$ el valor de la función tiende 2, y cuando $x\to0^-$ el valor de la función tiende -2.

3.

a)

La distancia del punto A al plano π se calcula:

$$d(P,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{cases}P(x_0,y_0,z_0)\to A=(2,1,0)\\ \pi\equiv ax+by+cz+d=0\to\pi\equiv 2x+3y+4z=36\end{cases}$$

$$d(A,\pi)=\frac{|2\cdot2+3\cdot1+4\cdot0-36|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=\frac{|4+3-36|}{\sqrt{29}}=\frac{|4+3-36|}{\sqrt{29}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}\,uds$$

Solución: La distancia de A a π es: $\sqrt{29}\,uds$

b)

El punto del plano π más próximo a A será un punto que esté situado justo debajo de A, es decir, la proyección de A sobre π.

Para calcular la proyección de A sobre π construiremos una recta que pase por A y que sea perpendicular al plano. Posteriormente, haremos la intersección de dicha recta con el plano, siendo el punto de intersección el punto buscado.

$$Recta\ perpendicular\ a\ \pi\ que\ pasa\ por\ A\to r\equiv\begin{cases}A=(2,1,0)\\ \overrightarrow{u_r}=\vec{n}_\pi=(2,3,4)\end{cases}\to r\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$$

La intersección de la recta r con el plano π se calcula resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos elementos geométricos:

$$r\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}\to3x=2y+4\to x=\dfrac{2y+4}{3}\\ \dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{4}\to3z=4y-4\to z=\dfrac{4y-4}{3}\end{cases}$$

$$\pi\equiv2x+3y+4z=36$$

Sustituyendo r en π:

$$2\cdot\left(\frac{2y+4}{3}\right)+3y+4\cdot\left(\frac{4y-4}{3}\right)=36\to 4y+8+9y+16y-16=108\to 29y=116\to y=\frac{116}{29}=4$$

$$x=\frac{2y+4}{3}=\frac{2\cdot 4+4}{3}=\frac{12}{3}=4$$

$$z=\frac{4y-4}{3}=\frac{4\cdot 4-4}{3}=\frac{12}{3}=4$$

Solución: El punto buscado es: $\boldsymbol{P=(4,4,4)}$

c)

El punto simétrico a A con respecto al plano π está ubicado en la recta perpendicular al plano que pasa por A. La distancia entre el punto de corte de esta recta con π (punto P calculado en el apartado anterior) y el punto A, es la misma que la distancia entre el punto de corte de r con π y el punto que buscamos (punto Q), es decir, el punto P es el punto medio del segmento AQ.

$$r\cap\pi=P\to P=(4,4,4)$$

$$P=\left(\frac{q_x-a_x}{2},\frac{q_y-a_y}{2},\frac{q_z-a_z}{2}\right)\to\begin{cases}A=(2,1,0)\\P=(4,4,4)\\Q=(x,y,z)\end{cases}$$

$$(4,4,4)=\left(\frac{x-2}{2},\frac{y-1}{2},\frac{z-0}{2}\right)\to\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=4\to x=6\\\dfrac{y-1}{2}=4\to y=7\\\dfrac{z-0}{2}=4\to z=8\end{cases}$$

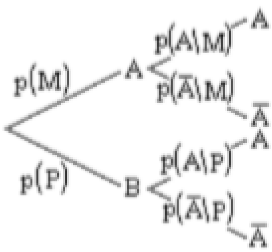
Solución: El punto simétrico a A con respecto al plano π es: $\boldsymbol{Q=(6,7,8)}$

4.

Inicialmente definimos los sucesos:

- Suceso M: Pacientes tratados con el medicamento.
- Suceso P: Pacientes tratados con placebo.
- Suceso A: Pacientes que mejoran.
- Suceso $\overline{\text{A}}$: Pacientes que no mejoran.

Elaboramos un diagrama en árbol para visualizar la información aportada en el enunciado:



Sabemos que:

- El 80 % de los pacientes que usan el medicamento mejoran, es decir: P(A/M) = 0,8
- El 10 % de los pacientes que no usan el medicamento mejoran, es decir: P(A/P) = 0,1
- En el experimento se les da a la mitad de los pacientes el medicamento y a la otra mitad placebo: P(M) = P(P) = 0,5

a)

La probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado será:

$$P(A) = P(M) \cdot P(A/M) + P(P) \cdot P(A/P) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}45 = \mathbf{45}\%$$

b)

La probabilidad de un paciente que ha mejorado, elegido al azar, haya sido tratado con el medicamento se calcula aplicando el Teorema de Bayes.

$$P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M) \cdot P(A/M)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}8}{0{,}45} = 0,\hat{8} = \mathbf{88,8}\ \%$$