Cuestión 1ª (2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) **Calcule el producto de matrices AB y la dimensión de la matriz resultante.**

b) **Calcule la matriz A^{-1} (la matriz inversa de A).**

c) **Calcule el rango de la matriz A.**

d) **Calcule el rango de la matriz B.**

a) El producto de las dos matrices es

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(1)+3(-1) & (-1)0+3(-2) & (-1)(1)+3\cdot 1 \\ 1\cdot 1+1(-1) & 0(1)+1(-2) & 1\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de tres columnas y dos filas.

b) La inversa de una matriz A se puede calcular como

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)^t.$$

Calculamos el determinante: $|A| = (-1)(1) - 3\cdot 1 = -4$. La adjunta, por otro lado, es

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},$$

y su traspuesta será

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Juntándolo todo, la inversa es

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) El rango de una matriz es el tamaño de su submatriz más grande con determinante distinto de cero. Como el determinante de la matriz A es distinto de cero, es de 2x2, y no cabe ninguna matriz más grande dentro de A, el rango de A es 2.

El rango de B es, como mucho, 2, porque no cabe ninguna matriz de 3x3 dentro. Si encontramos alguna matriz de 2x2 dentro de B con determinante distinto de 0, el rango de B será 2. Por ejemplo,

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1(-2) - 0(-1)0 = -2 \neq 0$$

Por tanto, el rango de B es 2.

Cuestión 2ª (2,5 puntos)

María, Pablo y Sofía han vendido boletos en una rifa benéfica. Sabemos que:
Entre María y Sofía vendieron 600 boletos.
Sofía vendió 100 boletos más que María.
Pablo vendió un tercio del total de todos los boletos.
Si llamamos x al número de boletos que vendió María, y al número de boletos que vendió Pablo y z al número de boletos que vendió Sofía,

a) **Escriba un sistema de ecuaciones con la situación planteada.**

b) **Resuelva el sistema del apartado anterior y calcule el número de boletos que vendió cada uno de los tres.**

Si María vendió x boletos y Sofía vendió z, entre las dos vendieron $x + z$. Nos dicen que vendieron 600, así que $x + z = 600$. Por otro lado, Sofía (z) vendió 100 más que María (x), así que $z = x + 100$. Finalmente, el total de los boletos vendidos es lo que vendió María (x) más lo que vendió Pablo (y), más lo que vendió Sofía (z), que es $x + y + z$. Nos dicen que lo que vendió Pablo, y, es un tercio de eso: $y = \frac{1}{3}(x + y + z)$.

Por tanto, el sistema de ecuaciones buscado es, después de reordenar para dejar todas las incógnitas a un lado y los números al otro,

$$\begin{aligned} x + z &= 600 \\ x - z &= -100 \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &= 0. \end{aligned}$$

b) Para resolverlo conviene multiplicar la tercera ecuación por tres para poder quitar las fracciones. Así, el sistema que nos interesa es

$$\begin{aligned} x + z &= 600 \\ x - z &= -100 \\ x - 2y + z &= 0. \end{aligned}$$

En forma matricial, este sistema es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & -1 & -100 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos resolver el sistema rápidamente por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 600 & 0 & 1 \\ -100 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 200 - 0 - 0 - 1200}{-2 - 2} = 250$$

Sabiendo que $x = 250$, podemos usar la primera ecuación para ver que $z = 350$, y por la tercera $y = 300$.

Por tanto, María vendió 250 boletos, Pablo vendió 300, y Sofía vendió 350.

Cuestión 3ª (2,5 puntos)
Dada la función $f(x) = x^3 - 15x^2 + 63x - 32$, calcule de forma razonada,

a) **Los valores que toma la función en x = −1 y en x = 0**

b) **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.**

c) **Máximos y mínimos relativos de dicha función y los valores que toma la función en dichos puntos**

a) Para hallar los valores de la función en x=-1, x=0, basta con sustituir:

$$f(-1) = (-1)^3 - 15(-1)^2 + 63(-1) - 32 =$$

$$f(0) = (0)^3 - 15(0)^2 + 63(0) - 32 = -32.$$

Para estudiar el crecimiento de una función necesitamos conocer su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 30x + 63 \tag{1}$$

Encontramos los puntos críticos de la función igualando a cero la derivada y resolviendo:

$$3x^2 - 30x + 63 = 0 \rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \cdot 3 \cdot 63}}{2 \cdot 3} = \frac{30 \pm 12}{6}$$

$(-\infty,3)$	(3,5)	(5,∞)
+	-	+
Crece	Decrece	Crece

así que los puntos críticos son en 5 y 3.

Con los puntos críticos construimos la tabla de crecimiento y decrecimiento.

Sustituimos en la derivada valores entre los puntos críticos, y tenemos la tabla: Con esto, vemos que la función crece en $(-\infty,3)\cup(5,\infty)$ y decrece en $(3,5)$

c) Los puntos críticos de la función pueden ser máximos o mínimos o puntos de silla. Como en $x=3$ la función pasa de crecer a decrecer, es un máximo, y como en x=5 pasa de decrecer a crecer, es un mínimo.

Los valores que toma la función en esos puntos se calculan como en el apartado a: $f(3)=51$

$f(5)=33$

Cuestión 4ª (2,5 puntos) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4}$$

a) **Calcule su dominio de definición.**

b) **Calcule sus asíntotas.**

a) Como la función es una división de funciones, tenemos que tener cuidado con que la función de abajo no sea cero, porque tendríamos algo entre cero que no existe. La función de abajo vale cero en $x^2-4=0\rightarrow x=\pm 2$. Por tanto, tenemos que quitar estos puntos del dominio. Nos queda:

$Dom(f)=\mathcal{R}-\{\pm 2\}$

b) Las asíntotas pueden ser de tres tipos: horizontales, verticales y oblicuas. Para ver si hay horizontales calculamos $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^2+2}{x^2-4}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$

Por tanto, la función tiene una asíntota horizontal $y=1.$

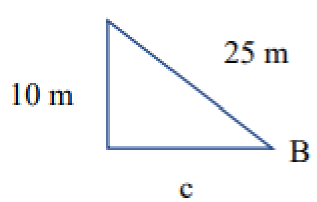
Como hay asíntota horizontal, no hay asíntota oblicua.

Las asíntotas verticales pueden aparecer en los problemas de dominio. Como en nuestro caso en $x\rightarrow 2$ y $x\rightarrow -2$ tenemos indeterminaciones de tipo $k/0$, hay asíntotas verticales en $x=2$ y $x=-2$.

Cuestión 5ª (1 punto) Considere el siguiente triángulo rectángulo que se muestra en la figura adjunta.

a) **Calcule el valor del cateto c expresando el resultado con dos cifras decimales.**

b) **Calcule las razones trigonométricas seno, coseno y tangente del ángulo B.**



a) Podemos calcular el valor del cateto c a partir del teorema de Pitágoras

$$10^2+c^2=25^2\rightarrow c^2=25^2-10^2\rightarrow c=\sqrt{25^2-10^2}=22,91$$

c) Las razones trigonométricas son

$$cos(B)=\frac{22,91}{25}=0,91$$
$$sin(B)=\frac{10}{25}=0,4$$
$$tan(B)=\frac{10}{22,91}=0,44$$