•

CUESTIONES

1.- Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz A−3I, siendo I la matriz identidad es:

a) −5. b) −3. c) 0.

2.- La inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.- Sean A y B dos matrices 2x2. La igualdad $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ se cumple:

a) Siempre. b) Solo si AB=BA. c) Solo si A=B.

4.- Los vectores $\mathbf{v_1} = (2, -1,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,2,1)$ y $\mathbf{v_3} = (3,1,1)$ son:

a) son base de $\mathbb{R}^3$.

b) son linealmente independientes.

c) son linealmente dependientes.

5.- El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ es:

a) uno. b) dos. c) tres.

6.- Sea A una matriz cuadrada de tamaño 3x3. Si el determinante de A es 3 entonces el determinante de la matriz inversa A^{-1} es:

a) $\det(A^{-1}) = -3$. b) $\det(A^{-1}) = 1/3$. c) $\det(A^{-1}) = 3$.

7.- Toda matriz A que verifica que $A^4 = I$, siendo I la matriz identidad, satisface la siguiente propiedad:

a) $A^{-1} = A^3$, siendo A^{-1} la matriz inversa.

b) el determinante de A es 1.

c) $A^2 = A^T$, siendo A^T la matriz traspuesta.

8.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si X es la solución de la ecuación matricial: AX+B+C=I, siendo I la matriz identidad, entonces el elemento de la primera fila y la primera columna de X es:

a)−3. b) −2. c) 3.

9.- El sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$

a) tiene una única solución.

b) no tiene solución.

c) tiene infinitas soluciones.

10.- El área del triángulo formado por los vértices A(1,1,1), B(2,2,2) y C(0,1,1) es:

a) 1. b) $\sqrt{2}$. c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.- Las rectas $r: x-1=y+1=z-2$ y $s: x+2=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$

a) no se cortan en ningún punto.

b) se cortan en un único punto.

c) son coincidentes.

12.- La ecuación del plano que es perpendicular a los planos $\pi_1: x+y-z=1$ y $\pi_2: x-y+z=7$ y pasa por el origen P(0,0,0) es:

a) x−2y+z=0. b) y = 0. c) y+z=0.

13.- La distancia entre los planos

a) $2\sqrt{3}$. b) 2. c) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

14.- Dado el plano π: $x+y-2z=-1$ y la recta $r: x-1=-y=z$, se verifica que:

a) la recta está contenida en el plano.

b) se cortan en un único punto.

c) la recta es paralela al plano y no se cortan.

15.- La ecuación del plano que pasa por los puntos P(1,0,0), Q(1,1,1) y R(2, −1,1) es:

a) 2x+y−z = 2.

b) x+y−z = 1.

c) 2x+y−2z = 1.

PROBLEMAS

Elegir uno entre los siguientes DOS problemas:

1.- Calcule las siguientes integrales

a) (1 punto) $\int x^3 ln(x^4+1)dx$

Para realizar la integral se hace el cambio de variable $t=(x^4+1) \rightarrow \frac{dt}{dx}=4x^3$. De este modo, $\int x^3 ln(x^4+1)dx = \frac{1}{4}\int \ln(t)\,dt = \frac{1}{4}(tln(t) - \int dt) = \frac{1}{4}(tln(t)-t)$, donde $\int \ln(t)\,dt$ se ha resuelto mediante el método de integración por partes ($\int udv = uv - \int vdu$, con $u=\ln(t) \rightarrow du = \frac{dt}{t}$ y $dv = dt \rightarrow v = t$).

Deshaciendo el cambio de variable se obtiene el resultado de la integral:

$$\int x^3 ln(x^4+1)dx = \frac{(x^4+1)[\ln(x^4+1)-1]}{4} + c$$

b) (0,75 puntos) $\int \frac{e^{2x}+1}{(e^{2x}+2x)^2}dx$

Para resolver esta integral se hace el cambio de variable $t = e^{2x}+1 \rightarrow \frac{dt}{dx} = 2e^{2x}+2$. Entonces:

$$\int \frac{e^{2x}+1}{(e^{2x}+2x)^2}dx = \int \frac{dt}{2t^2} = -\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2(e^{2x}+2x)} + c$$

c) (0,75 puntos) $\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = \int \frac{1}{\frac{4}{4}[(x+1)^2+4]}dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{(x+1)^2}{4}+1\right)}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}\frac{\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

2. Se considera la siguiente función:

$$f: [0,2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

x cos²x

a) (0,5 puntos) Estudie si la función es par(es decir, verifica que f(x) = f(-x) para todo $x \in [0,2\pi]$) o impar (es decir, verifica que f(x)=−f(−x) para todo $x \in [0,2\pi]$).

$f(-x) = \cos^2(-x) = \cos^2 x = f(x)$, por lo que se trata de una función par.

b) (1,5 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule los extremos relativos si existen (solo en el intervalo $[0,2\pi]$).

Se calculan la primera y la segunda derivada:

$$f'(x) = -2senxcosx$$

$$f''(x) = 2(sen^2x - \cos^2 x)$$

Los posibles extremos relativos serán aquellos puntos que cumplan $f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \\ \pi \\ \frac{3\pi}{2} \\ 2\pi \end{cases}$.

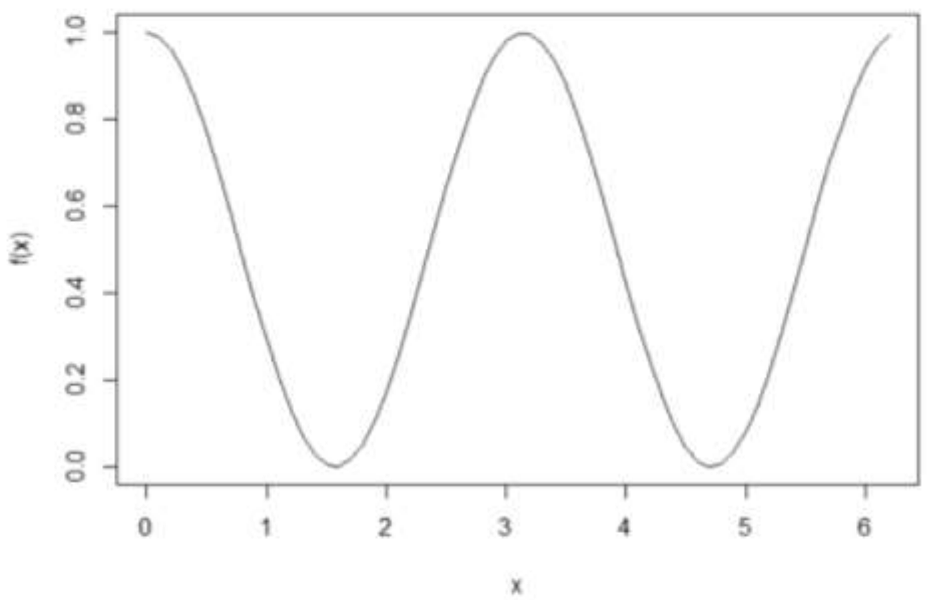
Evaluando el signo de $f'(x)$ en los intervalos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ se obtienen los intervalos de crecimiento y decrecimiento ($f(x)\ creciente\ si\ f'(x) > 0\ \ y\ decreciente\ si\ f'(x) < 0$).

De este modo se obtiene que $f(x)$ creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y $f(x)$ decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Los extremos relativos se clasifican en: $\begin{cases} Máximos\ (f''(x) < 0) \\ Mínimos\ (f''(x) > 0 \end{cases}$

$f(x)$ presenta un máximo en $(\pi, 1)$ y dos mínimos en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$.

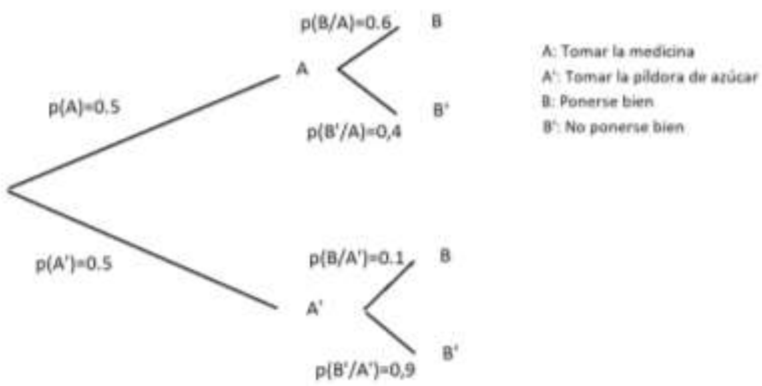
c) (0,5 puntos) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de f.



<u>Elegir uno entre los siguientes DOS problemas:</u>

1.- Pedro forma parte de un experimento médico que prueba el efecto de cierta medicina frente a una enfermedad. La mitad de personas toman la medicina y la otra mitad toma una píldora de azúcar, que no tiene ningún efecto contra la enfermedad. La medicina tiene un 60% de éxito. Pero las personas que no toman la medicina todavía tienen un 10% de oportunidades de ponerse bien.

a) (0,5 puntos) Dibuje un diagrama de árbol (o árbol de probabilidad) que recoja las probabilidades de los sucesos descritos.



b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que una persona escogida al azar se ponga bien.

Por el teorema de la probabilidad total se obtiene:

$$P(B) = P(A)P(B/A) + P(A')P(B/A') = 0.6 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.35 = 35\%$$

c) (1 punto) Si Pedro se ha curado, encuentre la probabilidad de que haya tomado la píldora de azúcar.

Por el teorema de Bayes se obtiene:

$$p(A'/B) = \frac{p(A' \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A') \cdot p(B/A')}{p(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.35} = 0.143 = 14.3\%$$

2.- Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio con probabilidades

$$p(A) = \frac{4}{9}, p(B) = \frac{1}{2} \ y \ p(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

Los sucesos A y B serán independientes si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{18} \approx 0.278$$

$$p(A) \cdot p(B) \approx 0.222$$

$p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$. Por lo tanto, los sucesos A y B no son independientes.

b) (1 punto) Calcular $p(\bar{A}/B)$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A.

Para calcular la probabilidad pedida, se hace uso del teorema de Bayes, de modo que:

$$p\left(\frac{\bar{A}}{B}\right) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{4}{9} \approx 0.444$$

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Por la ley de Morgan se sabe que $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$. Por lo tanto:

$$p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = \frac{13}{18} \approx 0.722$$