INSTRUCCIONES

- Es necesario un cuaderno de espiral tamaño A4.

- Dejar la primera hoja del cuaderno en blanco y poner:
  - Título: Refuerzo de Matemáticas II
  - Nombre y apellidos.

- El cuaderno se hará a bolígrafo.

- Cuidar la caligrafía.

- No cometer faltas de ortografía.

- La tarea se entregará todas las semanas (martes).

- Puedes consultar todas las dudas que te surjan vía correo electrónico a: charo@luis-vives.es

REFUERZO MATEMÁTICAS II

Bloque I: Álgebra

OPERACIONES CON MATRICES

Recuerda:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}+(\mathbf{-1}) & \mathbf{-1}+\mathbf{0}\\ \mathbf{0}+\mathbf{3} & \mathbf{-2}+(\mathbf{-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}-(\mathbf{-1}) & \mathbf{-1}-\mathbf{0}\\ \mathbf{0}-\mathbf{3} & \mathbf{-2}-(\mathbf{-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3}\boldsymbol{A}=\mathbf{3}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\cdot\mathbf{0} & \mathbf{3}\cdot(\mathbf{-1})\\ \mathbf{3}\cdot\mathbf{0} & \mathbf{3}\cdot(\mathbf{-2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-6}\end{pmatrix}$$

1. Se consideran las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 5 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix};\ F=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Calcular:

a) A + B y B - A
b) A + C y A - C
c) B + C y B - C
d) D + A y D - A
e) E + F y E -F
f) 4A
g) -5B
h) -2D
i) 3F
j) 2A - C - 3B
k) B - C + 2A
l) E - 2F
m) F + 2E
n) E - 5F + D
o) AB y BA
p) AC y CA
q) BC y CB

r) DE y ED
s) DF y FD
t) EF y FE
u) AB + 2BC
v) CB – CA + 3BA
w) EF - 2FE
x) 2EF + DE – 4FE

DETERMINANTES

Recuerda:

- **Sólo se pueden calcular determinantes de matrices cuadradas.**
- **Para calcular determinantes de matrices 2x2 usamos la siguiente regla:**

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Para calcular determinantes de matrices 3x3 usamos la regla de Sarrus:**

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = [(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31})] - [(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})]$$

1. Calcule los siguientes determinantes de orden dos:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$
d) $|D| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
e) $|E| = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
f) $|F| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
g) $|G| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
h) $|H| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$
i) $|I| = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
j) $|J| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

2. Calcule los siguientes determinantes de orden tres:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

e) $|E| = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix}$

f) $|F| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

g) $|G| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

h) $|H| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

i) $|I| = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

ADJUNTOS Y MENORES COMPLEMENTARIOS

Recuerda:

- **Para calcular el menor complementario de un elemento de una matriz:**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow Tacho\ la\ fila\ 1\ y\ la\ columna\ 1\ obteniendo\ este\ determinante$$

- **Para calcular el adjunto de un elemento de una matriz:**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- **Para calcular la matriz adjunta de una matriz:**

$$Adj\ (A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los menores complementarios M_{11} y M_{12} de la matriz A.
b) Calcular los menores complementarios M_{21} y M_{22} de la matriz A.
c) Calcular los menores complementarios M_{11} y M_{12} de la matriz B.
d) Calcular los menores complementarios M_{21} y M_{22} de la matriz B.
e) Calcular los menores complementarios M_{11}, M_{12} y M_{13} de la matriz C.
f) Calcular los menores complementarios M_{21}, M_{22} y M_{23} de la matriz C.
g) Calcular los menores complementarios M_{11}, M_{12} y M_{13} de la matriz D.
h) Calcular los menores complementarios M_{21}, M_{22} y M_{23} de la matriz D.

2. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calcular los adjuntos A_{11} y A_{12} de la matriz A.
b) Calcular los adjuntos A_{21} y A_{22} de la matriz A.
c) Calcular la matriz adjunta de la matriz A.
d) Calcular los adjuntos A_{11} y A_{12} de la matriz B.
e) Calcular los adjuntos A_{21} y A_{22} de la matriz B.
f) Calcular la matriz adjunta de la matriz B.
g) Calcular los adjuntos A_{11}, A_{12} y A_{13} de la matriz C.
h) Calcular los adjuntos A_{21}, A_{22} y A_{23} de la matriz C.
i) Calcular la matriz adjunta de la matriz C.
j) Calcular los adjuntos A_{11}, A_{12} y A_{13} de la matriz D.
k) Calcular los adjuntos A_{21}, A_{22} y A_{23} de la matriz D.
l) Calcular la matriz adjunta de la matriz D.

MATRICES INVERSAS

Recuerda:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{(\boldsymbol{Adj\ A})^{\boldsymbol{T}}}{|\boldsymbol{A}|}$$

1. ¿Tienen inversa las siguientes matrices? Justifique la respuesta.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

h) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

i) $I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

j) $J = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

k) $K = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

l) $L = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

m) $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

n) $N = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

o) $O = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Calcule las inversas de las matrices anteriores en el caso que se pueda.

ECUACIONES MATRICIALES

Recuerda:

- **Hay que respetar la posición de las matrices: AB ≠ BA.**
- **En las ecuaciones matriciales las matrices tienen las mismas dimensiones.**
- **La matriz I es la matriz identidad.**
- **Las matrices que están sumando pasan al otro lado de la igualdad restando y viceversa.**
- **Las matrices que están multiplicando pasan al otro lado de la igualdad como matriz inversa.**
- **En las ecuaciones matriciales 3A = 3IA.**

1. Despeje la matriz "X" de las siguientes ecuaciones:

a) XA = B
b) AX = B
c) XA = B + I
d) AX = B + I
e) XA + B = 2C
f) AX – B = C
g) AX – B – C = I
h) XA + B – C = 2I – E
i) XA – B – 3C = 7I
j) AX + BX = C
k) XA – XB = 2C
l) AX + B = A – X
m) AX – B = CX - I
n) A + XA = XB – C
o) XAB + X5A = C
p) 3X – 3AX = C + BX – I
q) 2X – XA = B

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determine la matriz "X" de dimensión 2 x 2 tal que: XA = B
b) Determine la matriz "X" de dimensión 2 x 2 tal que: AX = B + I
c) Determine la matriz "X" de dimensión 2 x 2 tal que: XA – C = B - I
d) Determine la matriz "X" de dimensión 2 x 2 tal que: AX – B = CX – I
e) Determine la matriz "X" de dimensión 2 x 2 tal que: XAB + X5A = C

PROFESORA: Charo Ramos Pérez

RANGO DE UNA MATRIZ

Recuerda:

- **Se dice que dos filas o columnas son linealmente independientes (LI) cuando no existe ninguna relación entre ellas.**
- **El rango de una matriz es el número de filas o columnas LI.**
- **El número de filas LI es igual al número de columnas LI.**
- **Cuando $|A| \neq 0$ todas sus filas y columnas son LI.**

1. Calcule el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

g) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

h) $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

i) $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

j) $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

RESOLUCUIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES: CRAMER Y GAUSS

Recuerda:

- **El método de Cramer sólo se puede aplicar cuando $|A| \neq 0$.**

$$\begin{cases} x+3y=-2 \\ 4x-5y=9 \end{cases} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \; ; \; A^*=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 9 & -5 \end{vmatrix}}{|A|} \; ; \; y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{|A|}$$

- **El método de Gauss se puede utilizar para resolver cualquier sistema de ecuaciones.**

Ejemplo I: SCD

$$\begin{cases} -x+y+2z=-1 \\ 5x+2y-3z=5 \\ x+y-z=2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\textit{Elijo fila pivote y la coloco en primer lugar, esta fila no cambia.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\textit{Opero la } F_1 \textit{ con } F_2 \textit{ y } F_3 \textit{ para hacer ceros en los elementos } a_{21} \textit{ y } a_{31}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} F_2-5F_1 \\ F_3+F_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5-5\cdot 1 & 2-5\cdot 1 & -3-5\cdot(-1) & 5-5\cdot 2 \\ -1+1 & 1+1 & 2+(-1) & -1+2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\textit{Opero la } F_2 \textit{ con la } F_3 \textit{ para hacer cero el elemento } a_{32}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow 3F_3+2F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 3\cdot 0-2\cdot 0 & 3\cdot 2+2\cdot(-3) & 3\cdot 1+2\cdot 2 & 3\cdot 1+2\cdot(-5) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{Paso\ de\ matriz\ a\ sistema\ de\ ecuaciones.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+y-z=2 \\ -3y+2z=-5 \\ 7z=-7 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Resuelvo\ el\ sistema\ de\ ecuaciones}$$

$$\begin{cases} x = 2-y+z = 2-1+(-1) = 0 \\ y = \dfrac{-5-2z}{-3} = \dfrac{-5-2\cdot(-1)}{-3} = \dfrac{-3}{-3} = 1 \\ z = \dfrac{-7}{7} = -1 \end{cases}$$

Ejemplo II: SCI

$$\begin{cases} -x+y+2z=-1 \\ 5x+2y-3z=5 \\ 4x+3y-z=4 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{Elijo\ fila\ pivote\ y\ la\ coloco\ en\ primer\ lugar, esta\ fila\ no\ cambia.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{Opero\ la\ F_1\ con\ F_2\ y\ F_3\ para\ hacer\ ceros\ en\ los\ elementos\ a_{21}\ y\ a_{31}.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \to \begin{cases} F_2+5F_1 \\ F_3+4F_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5+5\cdot(-1) & 2+5\cdot 1 & -3+5\cdot 2 & 5+5\cdot(-1) \\ 4+4\cdot(-1) & 3+4\cdot 1 & -1+4\cdot 2 & 4+4\cdot(-1) \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{Como\ la\ F_2\ y\ la\ F_3\ son\ iguales\ o\ proporcionales\ elimino\ una\ de\ ellas.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{Como\ ya\ no\ puedo\ segir\ haciendo\ Gauss\ paso\ de\ matriz\ a\ sistema\ de\ ecuaciones.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} -x+y+2z=-1 \\ 7y+7z=0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Hay\ 3\ incógnitas\ y\ 2\ ecuaciones, la\ solución\ depende\ de\ un\ parámetro\ (3-2=1)}$$

$$\boldsymbol{Eleijo\ una\ incógnita\ como\ parámetro\ y\ resuelvo\ el\ sistema\ de\ ecuaciones}.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = y + 2z + 1 = \lambda + 1} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{-7z}{7} = -z = -\lambda} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{cases}$$

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones mediante Cramer en los casos que sea posible:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = -4 \\ x = y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = -11 \\ 4x + y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 3 \\ 5x - y + z = 10 \\ x + y + 3z = 4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -x + y = 3 - z \\ -y + z = 7 - x \\ x - z = 1 - y \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 14 \\ x - 6y = 12 - z \\ 5x = 38 + 11y \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 5z = 5 \end{cases}$

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones mediante Gauss:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ 3x - 2y + z = 13 \\ -5x - 4y + 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \\ x + 4y - 10z = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + 5y = 4 \\ -x + 6y = 10 \\ 12x - 7y = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x + 3y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 6y + z = 7 \\ x + 2y - z = -1 \\ 5x + 7y - 4z = 9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 4x - 5y + z = 15 \\ 2x + 4z = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 14 \\ x - 6y = 12 - z \\ 5x = 38 + 11y \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 5z = 5 \end{cases}$

PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

Recuerda:

- **Lee atentamente el enunciado del problema e intenta entenderlo.**
- **Define las incógnitas, para ello fíjate en lo que te piden.**
- **Recopila los datos del problema.**
- **Plantea las ecuaciones con los datos del problema.**
- **Ordena las ecuaciones y resuelve el sistema.**

1. Nombra las incógnitas y plantea la ecuación:

a) El bizcocho lleva la misma cantidad de harina que de azúcar.
b) En mi casa hay el doble de gatos que de perros.
c) Mi hermana pesa el triple que yo.
d) Hay la mitad de coches que de motos.
e) He comprado 2 lápices rojos menos que lápices azules.
f) Hay un cuaderno menos de mates que de lengua.
g) La suma de dos números distintos es igual a 7.
h) La resta de dos números distintos es igual a 5.
i) La división de dos números distintos es igual a 2.
j) El triple de un número más el doble de otro es 15.
k) La mitad de un número más las ¾ partes del otro suman 10.
l) El doble de un número menos la tercera parte es igual a 5.
m) Por cada 3 libros nuevos se vende uno usado.
n) Por cada 5 billetes de 20€ se introducen 2 de 10€.
o) Por cada 3 libros nuevos se vende uno usado.
p) Por cada 5 billetes de 20€ se introducen 2 de 10€.

2. Calcule el resultado de las siguientes operaciones:

a) El 10% de 125.
b) El 12% 51.
c) El 7% de 11.
d) El 2% de 5,3.
e) El 20% de 10,8.
f) Si el precio inicial de unas zapatillas DC es de 55€, ¿cuál es el precio tras aplicarle un descuento del 10%?
g) Si el precio inicial de unas zapatillas DC es de 55€, ¿cuál es el precio final tras aplicarle un descuento del 10%?
h) Si el precio inicial de una lata de atún es de 3€, ¿cuál es el precio final tras aplicarle un 2% de IVA?
i) Si el sueldo bruto de un ingeniero en España es de 1580€, ¿cuál es el sueldo neto tras aplicarle un 2% de IRPF?
j) Si pagas la multa de 300€ antes de un mes te cobran un 15% menos. ¿Cuánto pagarías de multa en ese caso?

3. Plantee los siguientes sistemas de ecuaciones y resuélvalos:

a) Un cliente de un supermercado ha pagado un total de 156 € por 24 l de leche, 6 kg de jamón serrano y 12 l de aceite de oliva. Calcular el precio de cada artículo, sabiendo que 1 l de aceite cuesta el triple que 1 l de leche y que 1 kg de jamón cuesta igual que 4 l de aceite más 4 l de leche.

b) Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que: El 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas. El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más del 60% de las de terror al representan la mitad del total de las películas. Hay 100 películas más del oeste que de infantiles. Halla el número de películas de cada tipo.

c) Una fábrica produce tres tipos de herramientas: A, B y C. En la fábrica trabajan tres obreros, durante 8 horas diarias cada uno, y un revisor para comprobar las herramientas durante 1 hora diaria. Para fabricar una herramienta de tipo A se emplean 2 horas de mano de obra y se necesitan 6 minutos de revisión, para la fabricación de una de tipo B se emplean 4 horas de mano de obra y 4 minutos de revisión y para una de tipo C se necesitan 1 hora de mano de obra y 4 minutos de revisión. Por limitaciones en la producción, se deben producir exactamente 12 herramientas al día. Calcula el número de herramientas de cada tipo que se elaboran cada día en la fábrica.

d) Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:
- No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.
- Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.
- Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

e) Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado, en total, 600 euros y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.

f) Compramos tres regalos A, B y C para tres amigos. Sabemos que hemos pagado 117 euros por los tres regalos tras habernos hecho un descuento del 10% sobre el precio total. Además sabemos que el precio del regalo C es el doble que el del regalo A y que el regalo C es 20 euros más caro que el regalo B. ¿Cuánto hemos gastado en cada regalo?

g) Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.