A1.- Calificación máxima: 2.5 puntos. Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Llamamos x, y, z a las longitudes de los listones largos, medios y cortos, respectivamente. Dos largos y cuatro intermedios (es decir, $2x+4y$) miden lo mismo que tres intermedios y quince cortos (es decir, $3y+15z$), así que $2x+4y = 3y+15z$. Un listón largo (x) supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto $(y+z)$, así que $x = y+z+17$. Por último, nueve listones cortos mas siete centímetros $(9z+7)$ igualan a uno intermedio y uno largo $(y+x)$, así que $9z+7 = y+x$.

Con todo esto tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x+y-15z &= 0 \\ x-y-z &= 17 \\ x+y-9z &= 7. \end{aligned}$$

Podemos resolver este sistema con el método de Cramer: usando la regla de Sarrus tenemos $|A| = -2$. Así, tenemos

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -15 \\ 17 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & -9 \end{vmatrix}}{-2} = 107cm$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -15 \\ 1 & 17 & -1 \\ 1 & 7 & -9 \end{vmatrix}}{-2} = 71cm,$$

y, sustituyendo en la segunda ecuación, $z = x-y-17 = 19cm$. Por tanto, los listones largos miden 107cm, los medianos miden 71cm, y los cortos miden 19cm.

A2- Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) **(0,5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en $x = \pi$**

b) **(1 punto) Probar que f(x) tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente esta vez, el teorema de Bolzano.**

c) **(1 punto) si $g(x) = f(-x)$ calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$**

a) La recta tangente en $x = \pi$ se puede escribir a partir de la ecuación punto pendiente como $y - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi)$. Por ello habrá que calcular los elementos de la gráfica:

$$f(\pi) = \pi^4 + \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 + \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = 5\pi^4$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3 \;\Rightarrow\; f'(\pi) = 10\pi^3$$

Solución: De modo que la ecuación de la recta tangente queda como:

$$y - 5\pi^4 = 10\pi^3(x-\pi) \;\Rightarrow\; y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$$

b) La función f(x) es polinómica y como tal, no tiene problemas de continuidad ni derivabilidad a lo largo del intervalo $(-\pi, 0)$. Además podemos comprobar que $f(-\pi) = f(0)$:

$$f(-\pi) = \pi^4 \to f(0) = \pi^4$$

Por lo tanto, según el teorema de Rolle existe un punto del intervalo $(-\pi, 0)$ donde la derivada de la función se anula. Para contrastar este resultado podemos contrastar con el Teorema de Bolzano, en este caso tomando la derivada del apartado anterior (a la que llamaremos h(X) para evitar confusiones).

$$h(x) = f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$$

Esta función continúa siendo polinómica, de modo que será continua dentro del intervalo especificado en el enunciado. Además habrá que comprobar si la imagen cambia de signo en los extremos, es decir si $h(-\pi)h(0) < 0$.

$$h(-\pi) = f'(-\pi) = -2\pi^3 \ y \ h(0) = \pi^3 \Rightarrow h(-\pi)h(0) < 0$$

Dado que las premisas del teorema del bolzano se cumple, podemos afirmar que la derivada se anulará en un punto del intervalo $(-\pi, 0)$.

c) Tomando las funciones $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$ y $g(x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$. Determinamos dónde se cortan estas dos funciones igualándolas y determinando los valores de X.

$$x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$$

$$2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \Rightarrow 2\pi x(x^2 + \pi^2) = 0$$

$$2\pi x(x^2 + \pi^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ y \ x = \sqrt{-\pi^2} \ (\nexists \ solucion \ \Re)$$

Ahora que sabemos que no se cortan dentro del intervalo indicado en el enunciado, debemos conocer qué función va por encima. Tomando un valor entre $x = 0 \ y \ x = \pi$, por ejemplo x=1.

$$f(1) = 1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4$$

$$g(1) = 1 - \pi + \pi^2 - \pi^3 + \pi^4$$

Como podemos ver, $g(1) < f(1)$ lo que implica que g(x) va por debajo en el intervalo. De este modo la integral queda como:

$$\int_0^\pi [f(x) - g(x)]dx = \int_0^\pi [2\pi x^3 + 2\pi^3 x]dx = \left[\frac{\pi x^4}{2} + \pi^3 x^2\right]_0^\pi = \frac{\pi^5}{2} + \pi^5 = \frac{3\pi^5}{2}$$

A3.- Dados los puntos A(0,0,1) y B(1,1,0), se pide:

a) **(1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B es perpendicular al plano** $z = 0$.

b) **(1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas** r_1, r_2 **que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano** $x + z = 1$ **y tales que la distancia entre ellas sea 1.**

a) Para determinar un plano necesitamos bien un punto y dos vectores contenidos en el plano, bien un punto y un vector normal al plano. En este caso el plano tiene que contener al punto A, como queremos que contenga también a B tendrá que contener el vector $AB = (1, 1, -1)$, y como es perpendicular al plano $z = 0$ tendrá que contener a su vector normal, $n = (0, 0, 1)$. Para que el plano buscado contenga a los dos vectores dados es necesario que su vector normal sea $\vec{n} = (1, 1, -1) \times (0, 0, 1) = i - j = (1, -1, 0)$, así que e l plano será de la forma

$$\pi = x - y = D. \tag{1}$$

Como el punto A tiene que ser solución de esta ecuación, necesitamos que se cumpla $0 - 0 = D$, así que $D = 0$ y el plano buscado será

$$x - y = 0. \tag{2}$$

b) El vector perpendicular al plano $x + z = 1$ es $(1, 0, 1)$ de modo que podemos determinar que un vector perpendicular a él estar contenido en el plano, por ejemplo $(0, 1, 0)$. Empleando el producto vectorial podemos encontrar un tercer vector que también estará contenido dentro del plano, en este caso: $(0, 1, 0) \times (1, 0, 1) = (1, 0, -1)$. Esto implica que un vector genérico perteneciente al plano viene dado por la combinación lineal:

$$\vec{v} = a(1, 0, -1) + b(0, 1, 0) = (a, b, -a)$$

.

Para determinar la relación entre los valores de a y b, imponemos que la distancia de la recta r_1, formada por este vector y el punto A, al punto B debe ser 1. Es decir:

$$d(r_1, B) = \frac{AB \times (a, b, -a)}{\sqrt{2a^2 + b}} = 1$$

$$\frac{|(1, 1, -1) \times (a, b, -a)|}{\sqrt{2a^2 + b}} = 1 \Rightarrow \frac{(b - a)\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = 1$$

Resolviendo esta ecuación encontramos los posibles valores de a y b.

$$\frac{(b - a)\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = 1 \Rightarrow 2(b - a)^2 = 2a^2 + b^2$$

De donde extraemos que $b = 0$ o $b = 2a$. Por lo tanto el vector director de la recta podría ser $(1, 0, -1)$ o bien $(1, 4, -1)$. Seleccionando, por ejemplo, el primer vector encontramos que las rectas podrían ser:

$$r_1 \equiv (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1)$$

$$r_2 \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(1, 0, -1)$$

A4.- Sabiendo que $P(\bar{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24}$, $P(A \cap \bar{B}) = 3/10$**, se pide:**

a) **(1.5 puntos) Calcular** $P(A \cap B)$ *y* $P(B)$

b) **(1.5 puntos) Calcular** $P(C)$**, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica** $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$

a) Aprovecharemos las propiedades $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{9}{20}$ y $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ de modo que:

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{B}) = 1 - \frac{11}{20} - \frac{3}{10} = \frac{3}{20} = 0,15$$

Para el segundo resultado empleamos la definición de probabilidad condicionada: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ y $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ de modo que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{20}}{1 - \frac{11}{20}} = \frac{1}{3} = 0,67$$

$$P(A|B) - P(B|A) = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{\frac{3}{20}}{P(B)} = (\frac{1}{24} + \frac{1}{3}) \Rightarrow \frac{\frac{3}{20}}{P(B)} = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Solución: $P(A \cap B) = 0,15 \ y \ P(B) = 0,4$

b) De la fórmula $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$ y teniendo en cuenta que al ser A y C dos sucesos independientes $P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C)$ tenemos:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A) \cdot P(C) = P(A) + P(C)(1 - P(A))$$

De esta expresión se obtiene

$$P(C)(1-P(A)) = P(A\cup C) - P(A) \rightarrow P(C) = \frac{P(A\cup C)-P(A)}{(1-P(A))} = \frac{\frac{14}{25}-\frac{9}{20}}{\frac{11}{20}} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Solución: $P(C) = 0,2$

B1.- Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$**,** $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **con** $b \neq 0$**, se pide:**

a) **(1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica** $BCB^{-1} = A$.

b) **(0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz** AA^t.

c) **(0.5 puntos) Resolver el sistema** $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) La ecuación que nos piden es equivalente a $BC = AB$ tras multiplicar ambos lados por B. Por otro lado, podemos escribir la matriz B como $b\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Con esto, nos queda la ecuación

$$b\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} b\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos cancelar las b y nos queda una ecuación independiente de b. Calculando ambos lados, vemos que dan lo mismo, así que esa ecuación se cumple para todos los valores de b (salvo $b = 0$, en cuyo caso no tiene inversa).

b) Podemos usar propiedades de determinantes para ahorrarnos trabajo: $|AA^t| = |A||A^t| = |A||A| = |A|^2$. Así, basta con calcular el determinante de A con la regla de Sarrus.

$$det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 9-1-1-1+3+3 = 12,$$

así que $|AA^t| = 12^2 = 144$.

c) Podemos resolver la ecuación multiplicando por la inversa de B para obtener

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la inversa de B en el caso $b = 1$ a través de la fórmula de la adjunta:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}Adj(A)^t. \tag{3}$$

El determinante de B es, por la regla de Sarrus, $|B| = -1$, y la adjunta es

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y la inversa es

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando esto por el vector $(3,-1,1)^t$, llegamos a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

B2.- Calcula:

a) **(1.25 puntos)** $\int_1^e (x+2)ln(x)dx$

b) **(1.25 puntos)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (tg(x/2))^{1/cos(x)}$

a) Esta integral se puede hacer por partes tomando $u = lnx, dv = x+2, du = 1/xdx, v = \frac{x^2}{2} + 2x$. Nos queda

$$\int_1^e (x+2)ln(x)dx = (\frac{x^2}{2} + 2x)ln(x) - \int_1^e (\frac{x}{2} + 2)dx = [(\frac{x^2}{2} + 2x)ln(x) - (\frac{x^2}{4} + 2x)]|_1^e = \frac{e^2+9}{4}.$$

b) Podemos probar el límite sustituyendo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (tg(x/2))^{1/cos(x)} = tg(\pi/4)^{1/cos(\pi/2) = 1^{1/0}},$$

que es una indeterminación de tipo $1/0$ y hay que trabajarla con límites laterales. Tenemos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (tg(x/2))^{1/cos(x)} = 1^{1/0^-} = 1^{-\infty},$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (tg(x/2))^{1/cos(x)} = 1^{1/0^+} = 1^{\infty}.$$

Ambos casos son indeterminaciones de tipo 1^∞, que se resuelven reescribiéndolo como

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{cos(x)}} = e^{\lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{cos(x)}(tan(x/2)-1)} = e^{\lim_{x\to\pi/2} \frac{sin(x/2)-cos(x/2)}{cos(x)cos(x/2)}} = e^{0/0}.$$

Podemos trabajar el límite del exponente con L'Hopital:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{sin(x/2) - cos(x/2)}{cos(x)cos(x/2)} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{1}{2}cos(x/2) + \frac{1}{2}sin(x/2)}{-sin(x)cos(x/2) - cos(x)\frac{1}{2}sin(x/2)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0} = -1. \tag{4}$$

Por tanto, el límite es e^{-1}

B3.- Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3, P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó a momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) **(1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.**

b) **(1 punto) Dado el punto Q(3,3,3) se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar a ordenador?**

a) El volumen de un tetraedro cuyas aristas son los vectores u, v, w es un sexto del determinante de esos tres vectores (o, lo que es lo mismo, su producto mixto). En nuestro caso, las aristas son

$$P_1P_2 = (1,0,-1)$$
$$P_1P_3 = (0,2,1)$$
$$P_1P_4 = (2,a-1,2),$$

así que el volumen es

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & a-1 & 2\end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|(-a+9)|.$$

Esto es igual a 1 si $a = 3$ o si $a = 15$, pero si $a = 15$ la arista P_1P_3 mide $\sqrt{4+14^2+4}$ que es mayor que 10, y no cabe en la impresora. Por tanto, $a = 3$.

b) Dado el punto Q, podemos sacar otros tres puntos A, B, C del paralelepípedo a partir de $A = Q + P_1P_2 = (4,3,2)$, $B = Q + P_1P_3 = (3,5,4)$ y $C = Q + P_1Q = (5,5,5)$.

Conseguidos esos tres puntos (4 contando con el propio Q) podemos obtener los otros cuatro como $D = A + P_1P_3 = (4,6,3)$, $E = B + P_1Q = (5,7,6)$, $F = C + P_1P_2 = 6,5,4$, y $G = E + P_1P_2 = (6,7,5)$.

B4.- Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego lanzamos dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

1. **(1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.**
2. **(1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.**

a) Las posibles combinaciones que dan una puntuación de 10 son: sacar en el azul un 2 y en el rojo un 4, en el azul un 4 y en el rojo un 3, en el azul un 6 y en el rojo un 2, y sacar un cinco en cada dado. La probabilidad de cada combinación es $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. Como son sucesos excluyentes (o, lo que es lo mismo, ramas distintas de un árbol), la probabilidad total será la suma de todos los $1/36$ que nos da cada rama, es decir, $P(10) = 4 \cdot \frac{1}{36} = 1/9$.

b) La primera pregunta la podemos calcular mediante el teorema de Bayes:

$$P(Azul - par|8) = \frac{P(Azul - par \cap 8)}{P(8)}.$$

Las combinaciones que dan 8 son azul 2 y rojo 3, azul 3 y rojo 5, azul 4 y rojo 2, azul 5 y rojo 3, azul 6 y rojo 1: en total, cinco combinaciones. La probabilidad de cada una es $1/36$, así que en total, $P(8) = 5/36$. De estas, sólo tres tienen un resultado par en el dado azul, así que $P(azul - par \cup 8) = 3/36$. Por tanto, $P(Azul - par|8) = 3/5$.

Para la segunda pregunta, observamos que si el número obtenido en el dado azul es par, la puntuación será par automáticamente. En cambio, si la puntuación en el azul es impar, la puntuación total será par sólo si el resultado del rojo es impar también. Aplicamos de nuevo el teorema de Bayes:

$$P(Rojo - impar|Total - par) = \frac{P(Rojo - impar \cup Total - par)}{P(Total - par)}.$$

Por la discusión anterior, si el rojo es impar la puntuación total es par tanto si azul es par como si no. Por tanto, $P(Rojo - impar \cup Total - par) = P(Rojo - impar) = 1/2$. Por otro lado, $P(Total - par) = P(Azul - par) + P(Azul - impar)P(Rojo - Impar) = 1/2 + 1/4 = 3/4$. En total, entonces,

$$P(Rojo - impar|Total - par) = 2/3.$$