**INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN**

El examen consta de **4 ejercicios**: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. **Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas**

**CALIFICACIÓN**: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

**DURACIÓN**: 90 minutos

**EJERCICIO 1** (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función

$$c(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)$$

Siendo $t$ el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

1.a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.

1.b) (0,75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?

1.c) (0,75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento

**EJERCICIO 2** (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **2.1** o **2.2**.

**Pregunta 2.1**

Se consideran las matrices $A$ y $B$ dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2.1.a)** (1,25 puntos) Calcule la matriz $D$ tal que $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I$, donde $I$ es la matriz identidad de tamaño $2 \times 2$.

**2.1.b)** (1,25 puntos) La matriz $A$ verifica la igualdad $A^2 = A + 2I$. Calcule $A^4$ .

**Pregunta 2.2**

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a+2)y = 2 \\ 2x - (a+3)y + (a+2)z = -5 \end{cases}$$

**2.2.a)** (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro $a$.

**2.2.b)** (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

**EJERCICIO 3** (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **3.1** o **3.2**.

Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

**Pregunta 3.1**

En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0{,}7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

**3.1.a)** (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.

**3.1.b)** (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.

**Pregunta 3.2**

En el segundo municipio:

**3.2.a)** (1,25 puntos) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del $90\%$ para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.

**3.2.b)** (1,25 puntos) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0{,}8$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del $95\%$, que el margen de error en la estimación no supere el $3\%$ ($\pm 3\%$).

**EJERCICIO 4** (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **4.1** o **4.2**.

**Pregunta 4.1**

De dos sucesos $A$ y $B$ sabemos que: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0{,}8$ y $P(\bar{A}) = 0{,}55$, donde $\bar{A}$ es el suceso complementario de $A$.

**4.1.a)** (1 punto) Calcule $P(A|B)$

**4.1.b)** (1 punto) Calcule $P(\bar{B}|A)$ siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de $B$.

**4.1.c)** (0,5 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap B)$.

**Pregunta 4.2**

En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40 % de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30 % son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30 % son solistas. Además, se ha observado que el 20 % de los dúos, el 15 % de los grupos musicales y el 25 % de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:

**4.2.a)** (1,25 puntos) Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

**4.2.b)** (1,25 puntos) Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

## SOLUCIÓN

**EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.**

**HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función**

$$\boldsymbol{c(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)}$$

**Siendo $\boldsymbol{t}$ el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.**

**1.a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.**

### RESOLUCIÓN

Para resolver este ejercicio hace falta reemplazar el valor $t = 1$ (60 minutos) en la función primitiva de $c(t)$, lo que implica que es necesario calcular su integral. Esto se sabe porque se indica que la función $c(t)$ es una tasa de variación instantánea; o, lo que es lo mismo, una derivada. Considerando lo anterior, la resolución sería la siguiente:

$$F(t) \int c(t)dt = \int \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)dt = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4} + k$$

El siguiente punto es determinar el valor de la constante $k$. Para ello, se puede resolver la función primitiva en el periodo $t = 0$, ya que, en ese momento, dado que no hay principio activo en el agua, que puede inferirse que $F(0) = 0$:

$$\left.\begin{array}{c} F(t) = \dfrac{3t^2}{4} - \dfrac{t^3}{4} + k \\ t = 0 \end{array}\right\} \rightarrow F(0) = \frac{3(0)^2}{4} - \frac{(0)^3}{4} + k = 0 \rightarrow k = 0$$

Se concluye pues que $k = 0$, por lo que la función primitiva será:

$$F(t) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4}$$

Contando con esto, ya puede obtenerse el valor de la función primitiva en $t = 1$:

$$\left.\begin{array}{c} F(t) = \dfrac{3t^2}{4} - \dfrac{t^3}{4} \\ t = 1 \end{array}\right\} \rightarrow F(1) = \frac{3(1)^2}{4} - \frac{(1)^3}{4} = 0{,}5\, mg$$

### CONCLUSIÓN

La cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber preparado el suero será de 0,5 mg.

**1.b) (0,75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?**

**RESOLUCIÓN**

Para determinar si la cantidad de principio activo aumenta en las 3 primeras horas, es necesaria conocer cuál es la monotonía de la función. Para ello, se busca primeramente el dominio de la función $F(t)$. Se trata de una función polinómica, por lo que su dominio son todos los números reales. No obstante, se debe tener en cuenta que la función depende del tiempo, por lo que deberá empezar en valor más bajo posible ( $t = 0$); y, además, dado que se indica una limitación de 3 horas, el valor máximo para $t$ será 3. Así pues, el dominio de la función será:

$$Dom\, f(t) = \mathbb{R} - \{(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)\} = [0,3]$$

Seguidamente, deben buscarse los puntos críticos de la función. Para ello, se toma la derivada de la función, se igual a cero, y se despeja $t$:

$$c(t) = \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right) = 0 \rightarrow\ t - \frac{t^2}{2} = 0 \rightarrow t\left(1 - \frac{t}{2}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 1 - \frac{t}{2} = 0 \rightarrow \frac{t}{2} = 1 \rightarrow t = 2 \end{cases}$$

Obtenida esta información, se crean intervalos considerando el dominio de la función. Estos intervalos se crean realizando cortes en el dominio, usando los valores de $t$ antes obtenidos. A continuación, se tomará un valor dentro de los intervalos, y se reemplazará en la primera derivada. Si el signo de la misma en dichos valores es positivo, la función será creciente; y, en caso contrario, decreciente.

| Dominio | $[0,2)$ | $(2,3]$ |
|---|---|---|
| Valor de $x$ | 1 | 2,5 |
| Signo de $f'(x)$ | $> 0$ | $< 0$ |
| Monotonía | Crece | Decrece |

**CONCLUSIÓN**

La cantidad de principio activo aumenta durante las 2 primeras horas.

**1.c) (0,75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.**

**RESOLUCIÓN**

Como se busca que la intensidad del sabor sea la más intensa (máxima), se puede recurrir a la información obtenida del apartado anterior. Se obtuvo un punto crítico en $t = 2$; y, considerando además que en el intervalo $[0,2)$ la función es creciente, y que es decreciente en el intervalo $(2,3]$, $t = 2$ se corresponde con un máximo. Por lo tanto, la máxima intensidad de sabor se alcanzará pasadas 2 horas.

Contando con esto, para determinarla cantidad de principio activo, se debe reemplazar $t = 2$ en la función primitiva determinada en el apartado 1.a):

$$\left.\begin{matrix} F(t) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4} \\ t = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow F(1) = \frac{3(2)^2}{4} - \frac{(2)^3}{4} = 1\, mg$$

## CONCLUSIÓN

La mayor intensidad de sabor se obtendrá pasadas 2 horas. En ese periodo de tiempo, habrá 1 mg de principio activo.

**EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.**

**Pregunta 2.1**

**Se consideran las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dadas por:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-100} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

**2.1.a) (1,25 puntos) Calcule la matriz $\boldsymbol{D}$ tal que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}^t + \boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}^{-1} = 2\boldsymbol{I}$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad de tamaño $2 \times 2$.**

## RESOLUCIÓN

Para determinar la matriz $D$, es necesario, aplicar propiedades de las matrices:

$$B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I \to B^{-1}B(D^t + A^{-1})B^{-1}B = B^{-1} \cdot 2I \cdot B \to I(D^t + A^{-1}) \cdot I = 2I \cdot B^{-1} \cdot B \to$$

$$\to (D^t + A^{-1}) \cdot I^2 = 2I \cdot I \to (D^t + A^{-1}) \cdot I^2 = 2I^2 \to D^t + A^{-1} = 2I \to \boldsymbol{D^t = 2I - A^{-1}}$$

Contando con todo esto, es necesario obtener ahora el valor de $A^{-1}$. Para ello, se puede recurrir al método de determinantes:

i) Se obtiene el determinante de $A$: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$

ii) Se obtiene la adjunta de $A$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

iii) Se transpone la matriz adjunta: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \to [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

iv) Se reemplaza en la fórmula general: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t \to A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ya con la inversa obtenida, puede resolverse la ecuación:

$$D^t = 2I - A^{-1} \to D^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

## CONCLUSIÓN

La matriz $D$ será: $D = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}$

**2.1.b) (1,25 puntos) La matriz $\boldsymbol{A}$ verifica la igualdad $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}$. Calcule $\boldsymbol{A}^4$ .**

## RESOLUCIÓN

Para determinar $A^4$, es necesario, aplicar propiedades de las matrices:

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (A^2)^2 = (A + 2I)^2 = A^2 + 4I^2 + 4AI = A + 2I + 4I + 4A = 5A + 6I$$

Hecho este despeje, se reemplazan las matrices $A$ e $I$:

$$A^4 = 5A + 6I = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### CONCLUSIÓN

La matriz buscada es: $A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Pregunta 2.2**

**Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y + z = -1} \\ \boldsymbol{ax + (-a+2)y = 2} \\ \boldsymbol{2x - (a+3)y + (a+2)z = -5} \end{cases}$$

**2.2.a) (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$.**

### RESOLUCIÓN

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario transcribir las ecuaciones a matriz:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a+2)y = 2 \\ 2x - (a+3)y + (a+2)z = -5 \end{cases} \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & -a+2 & 0 & 2 \\ 2 & -(a+3) & (a+2) & -5 \end{array}\right)$$

<u>Discusión del sistema</u>
Para discutir el sistema, se hará el siguiente procedimiento:
i) Se calcula el determinante de la matriz $A$, se iguala a cero, y se despeja el parámetro $a$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a+2 & 0 \\ 2 & -(a+3) & (a+2) \end{vmatrix} = -a^2 + a = 0 \rightarrow a(-a+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \rightarrow a = 0 \\ -a+1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

ii) Se discuten los posibles tipos de sistema, mediante casos:

<u>Caso 1:</u> $a \neq 0$ y $a \neq 1$
- $|A| \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3$
- $|A^*| \neq 0 \rightarrow Rg(A^*) = 3$

Interpretación

$Rg(A) = Rg(A^*) = Nº\ inc \rightarrow SCD$

<u>Caso 2</u>: $a = 0$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

- $|A| = 0 \rightarrow Rg(A) < 3$
  - $|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$
- $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -4 \rightarrow Rg(A^*) = 3$

Interpretación

$Rg(A) \neq Rg(A^*) \rightarrow SI$

<u>Caso 3</u>: $a = 1$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

- $|A| = 0 \rightarrow Rg(A) < 3$
  - $|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$
- $|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg(A^*) < 3$
  - $|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$

Interpretación

$Rg(A) = Rg(A^*) < Nº\ inc \rightarrow SCI$

## CONCLUSIÓN

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el sistema tiene una única solución; si $a = 0$, el sistema no tiene solución; y, si $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones.

**2.2.b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.**

## RESOLUCIÓN

Como se comprobó en el apartado anterior que, para cuando $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones, es necesario descartar una ecuación de las tres dadas (debido a que el rango de la matriz $A$ es 2), y descartar una solución de las tres dadas (debido a que el rango de $A^*$ es 2).

Primeramente, es necesario ubicar dónde se encuentra la dependencia, sea por filas o por columnas, que tienen los elementos de la matriz $A$:

$$A^* = \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3' = f_3 - 2f_1]{f_2' = f_2 - f_1} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2' \\ f_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

La dependencia está entre las filas 2 y 3, lo que indica que existe una dependencia lineal entre ambas. Considerando esto, se optará por descartar la tercera ecuación, y asignar a la variable $y$ como el parámetro solución $\lambda$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y - z = 3 \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z = -1 + \lambda \rightarrow x = -1 + \lambda - (2\lambda + 3) \\ z = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

Se obtienen con esto dos ecuaciones dependientes ambas de $x$ e $y$. Seguidamente pues, se resuelven las otras dos variables. En este caso, se optará por el método de reducción, restándole a la primera ecuación, la segunda:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 - \lambda \\ x + y = 2 - \lambda \end{cases} \rightarrow x = -1; y = 2 - \lambda - (-1) \rightarrow y - 2 - \lambda + 1 \rightarrow y = 3 - \lambda$$

## CONCLUSIÓN

La solución del sistema es: $x = 2 - \lambda, y = \lambda, z = 2\lambda - 3$

**EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.**

**Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.**

**Pregunta 3.1**

**En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0,7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:**

**3.1.a) (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.**

**RESOLUCIÓN**

Antes de comenzar con la resolución, es necesario tener en cuenta qué tipo de distribución se ha dado. Se trata de una distribución binomial $B(n, p)$; donde $n$ representa el tamaño de la muestra ($n = 600$), y $p$ representa a la proporción de personas que cumplen una característica dada (en este caso, se trataría de la proporción de personas que están comprometidas con prácticas de reciclaje, siendo dicha proporción $p = 0{,}7$).

Contando con lo anterior, para calcular el número esperado de personas que se pide, se debe obtener la media ($\mu$); sin embargo, es necesario tener en consideración que hay que saber cuál es la proporción de personas que no están comprometidas con prácticas de reciclaje.

Se sabe que el 70% (0,7) están comprometidas, por lo que es necesario plantearse cuál es la proporción de cuántos no lo estarán. Se tiene que considerar que, como se trata de una distribución binomial, las probabilidades asociadas a un suceso concreto son dicotómicas (es decir, que se produce el suceso, o no se produce el suceso), y que la suma de todos los sucesos de esta dicotomía debe dar el 100%.

Así las cosas, si se define la probabilidad de que se produzca un determinado suceso como "$p$", y la probabilidad de que no se produzca ese suceso como "$q$", y que su suma dará el 100%, puede plantearse la siguiente relación:

$$p + q = 1 \rightarrow q = 1 - p$$

Contando con que, por los datos del enunciado, se sabe que $p = 0{,}7$, entonces el valor de $q$ será:

$$q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Ya sabiendo cuál es la proporción de personas no comprometidas con prácticas de reciclaje, puede determinarse el número de personas que se pedía. Para ello, se multiplica a la proporción de personas ($q = 0{,}3$), por dicho número ($n = 600$):

$$\mu = q \cdot n \rightarrow \mu = 0{,}3 \cdot 600 = 180$$

**CONCLUSIÓN**

El número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje será de 180 personas.

**3.1.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.**

**RESOLUCIÓN**

Antes de poder calcular la aproximación a la Normal a partir de la distribución Binomial, es necesario considerar si es posible. El requisito para poder realizar dicha aproximación es que la muestra sea superior a 30. Dado que se trata de 600 personas, cumple el requisito, por lo que sí es aplicable dicha aproximación.

Así pues, se procede a calcular la media y la desviación típica. El valor de la media que se tiene que utilizar puede obtenerse a partir de una diferencia (dado que la muestra era de 600 personas, y de ellas hay 180 que no tiene compromiso con prácticas de reciclaje, por lo tanto hay 420 personas que sí tienen dicho compromiso).

En cuanto a la desviación típica ($\sigma$), se obtendrá a partir de la raíz cuadrada del producto de la muestra ($n = 600$), la proporción de personas que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje ($p = 0{,}7$), y la proporción de personas que sí estarán comprometidas con prácticas de reciclaje ($q = 0{,}3$).

$$\sigma = \sqrt{600 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = 11{,}225$$

Una vez obtenidos estos valores, se pasa a tipificar la variable, aplicando previamente la corrección de continuidad de Yates:

$$P(408 \leq X \leq 432) = P(408 - 0{,}5 \leq X' \leq 432 + 0{,}5) = P(407{,}5 \leq X' \leq 432{,}5) =$$

$$= P(X' \leq 432{,}5) - P(X' \leq 407{,}5) = P\left(Z \leq \frac{432{,}5 - 420}{11{,}225}\right) - P\left(Z \leq \frac{407{,}5 - 420}{11{,}225}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1{,}11) - P(Z \leq 1{,}11)$$

Hecha la tipificación, es necesario valorar si hay que realizar alguna modificación en la variable $Z$, a fin de que pueda realizarse la consulta de la misma en la Tabla de la Distribución Normal. Para poder realizar la consulta, es necesario que el valor se cumpla que $Z \leq k$; o, lo que es lo mismo, que aparezca el signo $\leq$, y que $k$ sea un número positivo.

Considerando esto, en el caso de $Z \leq 1{,}11$, no es necesario realizar nada; sin embargo, en el caso de $Z \leq -1{,}11$ sería necesario operarlo:

$$P(Z \leq -1{,}11) = P(Z \geq 1{,}11) = 1 - P(Z \leq 1{,}11)$$

Realizado el cambio, la operación resultante se expresaría de la siguiente manera:

$$P(Z \leq -1{,}11) - P(Z \leq 1{,}11) = [1 - P(Z \leq 1{,}11)] - P(Z \leq 1{,}11)$$

Así las cosas, se busca a continuación el valor crítico asociado a $Z = 1{,}11$. Dicho valor es el siguiente:

$$P(Z = 1{,}11) = 0{,}8665$$

Contando con todo esto, la probabilidad buscada es:

$$[1 - P(Z \leq 1{,}11)] - P(Z \leq 1{,}11) = [1 - 0{,}8665] - 0{,}8665 = 0{,}733 \cong 73{,}3\%$$

**CONCLUSIÓN**

La probabilidad que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432 personas, ambos inclusive, es de un 73,3%.

**Pregunta 3.2**

**En el segundo municipio:**

**3.2.a) (1,25 puntos) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.**

**RESOLUCIÓN**

Para calcular el intervalo de confianza para la proporción, hace falta obtener la proporción ($\hat{p}$) de la muestra ($n = 450$) que cumple el requisito "declararse comprometido con prácticas de reciclaje" ($k = 351$); y así como la proporción que no cumple dicho requisito ($\hat{q}$).

$$\hat{p} = \frac{351}{450} = 0{,}78; \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$$

Por otra parte, para obtener el intervalo de confianza para la proporción, es necesario conocer el valor crítico de $z$. Dicho valor se obtiene de la siguiente manera:

$$P\left(z_{\alpha/2} = t\right) = 1 - \frac{1 - 0{,}9}{2} \rightarrow P\left(z_{\alpha/2} = t\right) = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645$$

Así las cosas, el intervalo de confianza para la proporción se puede calcular de la siguiente manera:

$$IC_{0,9}(\hat{p}) = \left(\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\right) \rightarrow IC_{0,9}(\hat{p}) = \left(0{,}78 \pm 1{,}645 \sqrt{\frac{0{,}78 \cdot 0{,}22}{450}}\right) = (0{,}78 \pm 0{,}0321) = (0{,}7479; 0{,}8121)$$

**CONCLUSIÓN**

El intervalo de confianza para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje está comprendida entre 74,79% y 81’21%.

**3.2.b) (1,25 puntos) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación no supere el 3% ($\pm 3\%$).**

**RESOLUCIÓN**

Para determinar el tamaño de la muestra para garantizar que el número de personas, con un nivel de confianza del 95% ($1 - \alpha = 0'95$), el margen de error de estimación no supere el 3% ($E = 3\%$), debe obtenerse a partir de la fórmula para obtener el error de estimación:

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \rightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$$

A la hora de hacer el cálculo, es necesario disponer de los valores de la proporción de personas que están comprometidas con el reciclaje ($\hat{p} = 0{,}8$), la proporción de personas que no están comprometidas con el reciclaje ($\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$), y el valor crítico ($z_{\alpha/2}$) asociado a un nivel de confianza del 95%. Dicho valor se obtiene de la siguiente manera:

$$P\left(z_{\alpha/2} = t\right) = 1 - \frac{1 - 0{,}95}{2} \rightarrow P\left(z_{\alpha/2} = t\right) = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Contando con todo lo anterior, el valor de la muestra se calculará de la siguiente manera:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \rightarrow n \geq \left(\frac{1{,}96}{0{,}03}\right)^2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \rightarrow n \geq 682{,}95 \cong 683$$

**CONCLUSIÓN**

El tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación no supere el 3%, será de 683 personas.

**EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.**

**Pregunta 4.1**

**De dos sucesos $A$ y $B$ sabemos que: $P(A\cup B)=1$, $P(B)=0,8$ y $P(\bar{A})=0,55$, donde $\bar{A}$ es el suceso complementario de $A$.**

**4.1.a) (1 punto) Calcule $P(A|B)$.**

## RESOLUCIÓN

Para resolver $P(A|B)$, es necesario aplicar propiedades de la probabilidad:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Es necesario disponer de $P(A\cap B)$ y $P(B)$. En cuanto a $P(B)$, es un dato ya dado; sin embargo, el cálculo de $P(A\cap B)$ se puede obtener a partir de $P(A\cup B)$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\rightarrow$$

Por otra parte, dado que hace falta disponer de $P(A)$, es necesario calcularlo a partir de $P(\bar{A})$:

$$P(\bar{A})=1-P(A)\rightarrow P(A)=1-P(\bar{A})=1-0{,}55\rightarrow P(A)=0{,}45$$

Ya con toda la información necesaria obtenida, puede calcularse $P(A\cap B)$:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\rightarrow P(A\cap B)=0{,}45+0{,}8-1=0{,}25$$

Habiéndose obtenido $P(A\cap B)$, puede entonces resolverse $P(A|B)$:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}25}{0{,}8}=0{,}3125$$

## CONCLUSIÓN

La probabilidad buscada es: $P(A|B)=0{,}3125$

**4.1.b) (1 punto) Calcule $P(\bar{B}|A)$ siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de $B$.**

## RESOLUCIÓN

Para resolver $P(\bar{B}|A)$, es necesario aplicar propiedades de la probabilidad:

$$P(\bar{B}|A)=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(A)}$$

Es necesario disponer de $P(A\cap\bar{B})$ y $P(A)$. $P(A)$ se obtuvo en el apartado anterior ($P(A)=0{,}45$); por lo que se debe calcular únicamente $P(A\cap\bar{B})$. Dicho cálculo se obtiene a partir de la siguiente relación:

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

Dado que $P(A\cap B)$ se obtuvo también en el apartado anterior ($P(A\cap B)=0{,}25$), se puede resolver directamente:

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0{,}45-0{,}25=0{,}2$$

Ya con toda la información necesaria obtenida, puede calcularse $P(\bar{B}|A)$:

$$P(\bar{B}|A) = \frac{0,2}{0,45} = 0,44 \cong 44\%$$

**CONCLUSIÓN**

La probabilidad buscada es: $P(\bar{B}|A) = 0,44 \cong 44\%$

**4.1.c) (0,5 puntos) Calcule $\boldsymbol{P(\bar{A} \cap B)}$.**

**RESOLUCIÓN**

Para resolver $P(\bar{A} \cap B)$, es necesario aplicar propiedades de la probabilidad:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Es necesario disponer de $P(B)$ y $P(A \cap B)$. $P(B)$ es un dato dado en el propio enunciado ($P(B) = 0,8$); y, en cuanto a $P(A \cap B)$, se obtuvo en el apartado 4.1.a) ($P(A \cap B) = 0,25$). Contando con todo esto, $P(\bar{A} \cap B)$ se calculará de la siguiente forma:

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,8 - 0,25 = 0,55 \cong 55\%$$

**CONCLUSIÓN**

La probabilidad buscada es: $P(\bar{A} \cap B) = 0,55 \cong 55\%$

**Pregunta 4.2**

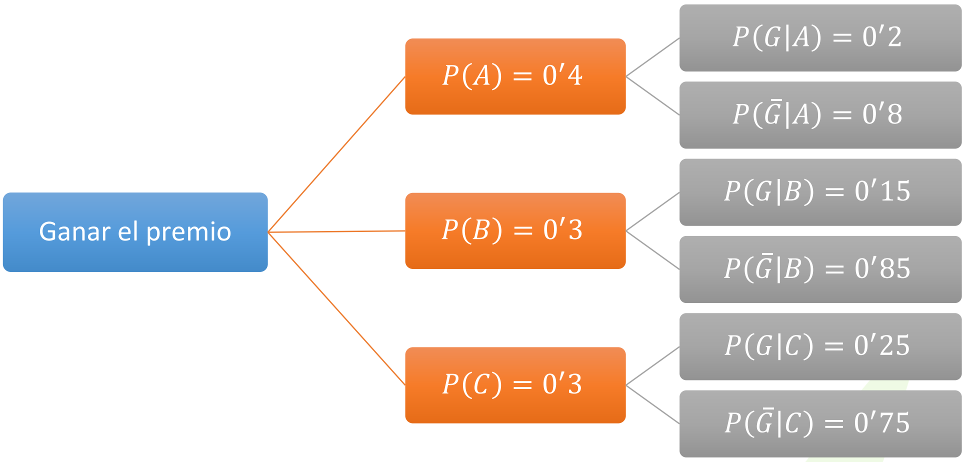
**En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40 % de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30 % son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30 % son solistas. Además, se ha observado que el 20 % de los dúos, el 15 % de los grupos musicales y el 25 % de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:**

**RESOLUCIÓN**

Antes de empezar a resolver el ejercicio, es necesario definir los sucesos que conforman el problema:

$A =$ dúo nominado  $B =$ grupo musical nominado  $C =$ solista nominado  $G =$ gana el premio

Con esta información, se plantea el árbol de probabilidad:




Con todo esto, puede resolverse el ejercicio.

**4.2.a) (1,25 puntos) Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.**

**RESOLUCIÓN**

Para calcular el Grammy Latino se obtiene a partir del Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(G) = P(A) \cdot P(G|A) + P(B) \cdot P(G|B) + P(C) \cdot P(G|C) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}2 \cong 20\%$$

**CONCLUSIÓN**

La probabilidad de que gane el premio es de un 20%.

**4.2.b) (1,25 puntos) Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría.**

**RESOLUCIÓN**

Para calcular la probabilidad de que dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría, debe aplicarse el Teorema de Bayes:

$$P(C|G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{P(C) \cdot P(G|C)}{P(G)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}25}{0{,}2} = 0{,}375 \equiv 37{,}5\%$$

**CONCLUSIÓN**

La probabilidad de que dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría, debe aplicarse el Teorema de Bayes es de un 37,5%.