PREGUNTAS TIPO TEST

Conteste a un máximo de 10 cuestiones:

1. Sea el polinomio $p(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (determinante). Entonces
   a) $\boldsymbol{p(a) = 0}$ **para algún valor** $\boldsymbol{a} > 0$
   b) El grado de $p(x)$ es menor que 4
   c) Ninguna de las otras dos
2. Sean la matriz $B = A^4$ dónde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b_{3,1}$ el número de la tercera fila y primera columna de B. Entonces
   a) **$b_{3,1}$ es un número par**
   b) $b_{3,1} > 10$
   c) Ninguna de las otras dos
3. Sea el sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases}$ Entonces la solución cumple:
   a) $x < z$
   b) **$y > x + z$**
   c) Ninguna de las otras dos
4. Sea el rombo $ABCD$ de vértices $A = (3,2,1), B = (4,5,2), C = (3,8,3)$ y $D = (a,b,c)$. Entonces
   a) $a > c$
   b) **$b > c$**
   c) Ninguna de las otras dos
5. Sea s la recta que pasa por los puntos $A = (0,1,1)$ y d la distancia del punto $Q = (0,3,0)$ a la recta s. Entonces
   a) $d < 1$
   b) $d > 2$
   c) **Ninguna de las otras dos**
6. Sea el plano π determinado por los puntos $A = (0,1,1), B = (1,0,2)$ y $C = (1,3,1)$. Entonces
   a) **El plano $2x + y + z - 2 = 0$ es perpendicular a π**
   b) El plano $3x + y + 7z - 10 = 0$ es perpendicular a π
   c) Ninguna de las otras dos

7. **Sean la recta r determinada por los puntos $A = (0,1,1)$ y $B = (1,0,2)$y la recta $s$determinada por los puntos $C = (1,0,1)$ y$D = (1,-2,0)$. Entonces**
   a) **ry s se cruzan**
   b) r y s se cortan en un punto
   c) Ninguna de las otras dos

8. **Sea la función $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{\sqrt[3]{x^5+3}}$(raíz cúbica). Entonces**
   a) La recta $y - 2 = 0$ es una recta asíntota de la gráfica de$f$
   b) La recta $2y + 1 = 0$ es una recta asíntota de la gráfica de f
   c) **Ninguna de las otras dos**

9. **Sea la función $f(x) = cos\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.Entonces**
   a) $f'(0) = 0$ y $f''(0) < 0$
   b) **$f'(0) > 0$ y $f''(0) < 1$**
   c) Ninguna de las otras dos

10. **Sea $k = \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}dx$ .Entonces**
   a) $k > ln2$ (logaritmo neperiano)
   b) **$k < \frac{1}{2}ln2$**
   c) Ninguna de las otras dos

11. **Sean la función $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-1}$, D su dominio o campo de existencia y $k = \lim_{x \to \to \infty} f(x)$.Entonces**
   a) $k = 1$
   b) **$D = (-\infty. -1] \cup [1, \infty)$**
   c) Ninguna de las otras dos

12. **De una urna con 10 bolas blancas, 6 bolas son negras y 4 bolas rojas, se extraen dos bolas una tras otra sin introducir la primera. Sean p la probabilidad de extraer dos bolas blancas, q la probabilidad de extraer dos bolas negras yr la probabilidad de extraer dos bolas rojas, Entonces**
   a) **$q = \frac{3}{38}$ y $r = \frac{3}{95}$**
   b) $p = \frac{28}{153}$ y $q = \frac{5}{51}$
   c) Ninguna de las otras dos

13. Se considera que la probabilidad de que, al nacer un perro, este sea macho, es 0,40. Sea $\boldsymbol{p}$ la probabilidad de que haya al menos un macho entre los 5 cachorros de una camada. Entonces

a) $p < 0{,}8$

b) $\boldsymbol{p} < 0{,}9$

c) Ninguna de las otras dos

14. De una baraja de 40 cartas se saca una carta y de deja descubierta, y se sacan otras dos tapadas. Sea $\boldsymbol{p}$ la probabilidad de que se tenga un trío (tres cartas de igual numeración o tres figuras), sabiendo que en la primera carta que se obtuvo es un caballo. Entonces

a) $\boldsymbol{p} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{250}}$

b) $p < \frac{1}{200}$

c) Ninguna de las otras dos

15. Se sabe que la probabilidad de que una semilla de sandía germine es 0,4. Se plantan 10 semillas de sandía. Sea $\boldsymbol{p}$ la probabilidad de que germine sólo 6 de las 10 semillas plantadas. Entonces

a) $p < 0{,}1$

b) $p > 0{,}3$

c) Ninguna de las otras dos

PREGUNTAS DE DESARROLLO

OPCIÓN1

1. **Sea la matriz $C = A^2 - 4A - 6B$**

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudie el rango de C en función del valor del miembro real A

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} ; \; 4A = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} ; 6B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = A^2 - 4A - 6B = \begin{pmatrix} 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 0; \; \begin{vmatrix} 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \end{vmatrix} = 0$$

Para cualquier valor de a el rango de la matriz C será < 3

Comprobemos ahora para que valores de a la matriz C será rango 2

$$\begin{vmatrix} 2a^2 - 4a - 6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 0 \, ; \, -9\left(2a^2 - 4a - 6\right) = 0; \; -18\left(a^2 - a - 3\right) = 0;$$

$$a = 3$$
$$a = -1$$

Para $a \neq -1 \; y \; a \neq 3$ el rango de la matriz C será 2

Para $a = -1 \; y \; a = 3$ el rango de la matriz C será 1

2. **Sean la recta R determinada por los planos $x - 2y - 2z - 1 = 0$ y $x + 5y - z = 0$, y el plano π defino por $2x + y + mz = n$, donde $m \; y \; n$ son números reales. Estudie los valores que deben tener $m \; y \; n$ para que la recta y el plano sean:**
   a) **Secantes**

b) Paralelos

a)R: $\quad x-2y-2z-1=0$ $\qquad\qquad\qquad$ $\pi: 2x+y+mz=n$

$\left\{ x+5y-z=0 \right.$

$$M=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 5 & -1\\ 2 & 1 & m\end{pmatrix};M^*\begin{pmatrix}1 & -2 & -20\\ 1 & 5 & -10\\ 2 & 1 & m\,n\end{pmatrix}$$

Para que la recta R y el plano π sean secantes $Rg(M)=Rg(M^*)=3$

$M=0;\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 5 & -1\\ 2 & 1 & m\end{vmatrix}=7m+23=0$; Para $m\neq\frac{-23}{7}$ la matriz M será rango 3

Para $m\neq\frac{-23}{7}$ la matriz M será rango 3 y por lo tanto también el rango de M* es 3.

Para que la recta y el plano sean secantes $m\neq\frac{-23}{7}$ y $n\in\mathbb{R}$

b) Para que la recta R y el plano π sean paralelos

$$Rg(M) = 2 \text{ y } Rg(M^*) = 3$$

Para m=-23/7 → $Rg(M) = 2$

Habrá que ver para que valores de n el rango de M^*= 3

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} = 7n - 9 = 0 \rightarrow n = \frac{9}{7}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ -\frac{23}{7} & 1 & n \end{vmatrix} = 2n + \frac{32}{7} = 0 \rightarrow n = -\frac{16}{7}$$

Nos sale un valor distinto de n probando con otro determinante por lo tanto serán las rectas paralelas para m=-23/7 y para n ∈ ℝ

OPCIÓN 2

3. Estudie y represente la siguiente función $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$

a) Dominio: $Dom\ f(x)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

b) Punto de corte

Con el eje $OX(y=0)$

$$\frac{x}{x^2-4}=0;\ x=0\ \rightarrow (0,0)$$

Con el eje $OY(x=0)$

$$y=\frac{0}{0^2-4}=0\rightarrow (0,0)$$

c) Asíntotas

Asíntotas Verticales

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x}{x^2-4}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x}{x^2-4}=-\infty\end{cases}$$

Asíntota vertical en $x=-2$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty$$

Asíntota vertical en $x=2$

Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x}{x^2-4}=0$$

Asíntota horizontal en $y=0$

Asíntotas Oblicuas: No existen al existir asíntota horizontal

d) Crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimo

$f'(x)=0;\ \frac{x}{x^2-4}=0;\ \ x^2\neq -4\ \rightarrow$ No existen puntos críticos

	(-∞,-2)	(-2,2)	(2,+ ∞)
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	↘	↘	↘

$f(x)$será decreciente en todo su dominio

e) Curvatura

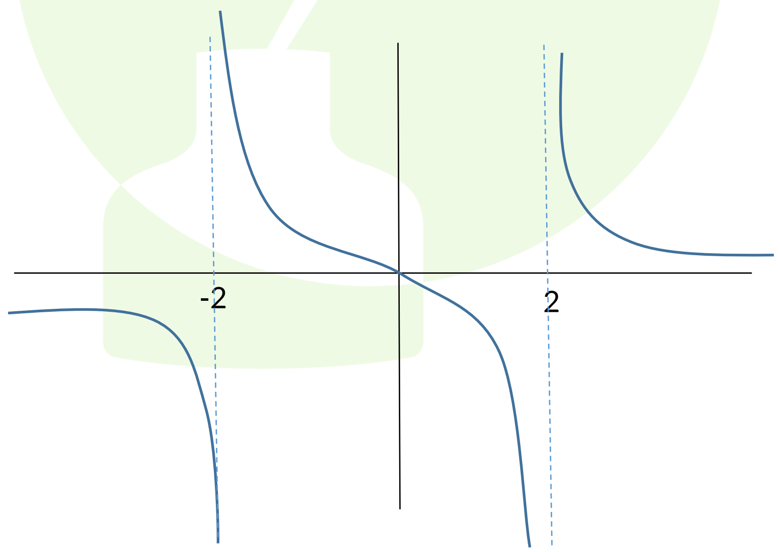
$$f'(x) = 0; \frac{2x\,(-x^2-12)}{(x^2-4)^3} = 0; x = 0$$

	(-∞,-2)	(-2,0)	(0,2)	(2,+ ∞)
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	∩	∪	∩	∪

$f(x)$será convexa en el intervalo (-2,0) ∪ (2,+∞)

$f(x)$será cóncava en el intervalo (-∞,-2) ∪ (0,2)

Tendremos un punto de inflexión en (0,$f(0)$) =(0,0)



4. **Se elige un número entero al azar entre 0 y 9999(ambos incluidos). ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor que 4444 y múltiplo de 5?**

Para ello partiremos del rango de valores que nos dicen, es decir, del 4444 hasta el 9999.

Sabemos que de 5000 números vamos a tener 1000 múltiplos de 5 (5000:5=1000) por lo que:

4445-9445= 1000 + 1 (al escoger ambos números extremos) =1001 múltiplos de 5
9445-9995 = 109 + 1= 110 múltiplos de 5

Por lo que tendremos 1001 +110=1111 casos posibles de 10.000

$$P = \frac{1111}{10000} = 0{,}1111$$