**PREGUNTAS TIPO TEST**

**Conteste a un máximo de 10 cuestiones.**

1. Si A, B son matrices reales tales que es posible formar el producto AB y, además, rango(A) = 2 y rango (B) = 3, entonces rango(AB) es:

(A) 6

(B) 3

(C) Ninguna de las anteriores

2. Si A es una matriz real m x n (con m distinto de n) y B es otra matriz tal que existen los productos AB y BA:

(A) Entonces B es una matriz n x n

(B) Entonces B es una matriz n x m

(C) Ninguna de las anteriores

3. Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

(A) Puede tener exactamente dos soluciones

(B) Si tiene un número par (mayor que 0) de soluciones, tiene infinitas

(C) Ninguna de las anteriores

4. Todo sistema de ecuaciones lineales que tiene más ecuaciones que incógnitas:

(A) Es incompatible

(B) Es compatible indeterminado

(C) Ninguna de las anteriores

5. El valor de k € R para el cual los vectores u = (k, 1) y v = (6,3) son linealmente dependientes:

(A) Puede ser negativo

(B) Es impar

(C) Ninguna de las anteriores

6. En el espacio vectorial R3:

(A) Puede haber un sistema generador con cuatro vectores

(B) Los elementos de todo sistema generador forman una base

(C) Ninguna de las anteriores

7. Dados los puntos del espacio A(1,7,11) y B(4, -2,17), otro punto alineado con ellos P(a, b, c) y tal que está a la mitad de distancia de A que de B, cumple:

(A) a + b +c = 19

(B) a • b• c < 0

(C) Ninguna de las anteriores

8. La funcion $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 7$

(A) Es decreciente en el intervalo (0,2)

(B) Es creciente en el intervalo (1,2)

(C) Ninguna de las anteriores

9. El límite $lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(A) No existe

(B) Es igual a 0

(C) Ninguna de las anteriores

10. La integral $\int_0^{\pi} x + sinx\, dx$

(A) Es menor o igual que 0

(B) Es mayor que $\pi^2/2$

(C) Ninguna de las anteriores

11. La integral definida $I = \int_{-5}^{5} \frac{x^{2023}}{x^{2024}+2} dx$

(A) Cumple que I > 1

(B) Cumple que I < 1

(C) Ninguna de las anteriores

12. Se lanzan simultáneamente 4 monedas. La probabilidad de obtener, al menos, una cara:

(A) Es mayor que 0.8

(B) Es menor que 0.3

(C) Ninguna de las anteriores

13. Sean A, B,C sucesos arbitrarios de un experimento aleatorio. El suceso "ocurren exactamente dos sucesos de entre los A, B, C" se expresa:

(A) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(B) $(A \cap B \ \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$, donde la barra denota el suceso complementario

(C) Ninguna de las anteriores

14. Sean A, B dos sucesos tales que P (A) = 2/5, P(B) = 1/3 y P($\bar{A} \cap \bar{B}$) = 1/3, donde la barra denota el suceso complementario. Entonces:

(A) 0.6 ≤ P(AUB) ≤ 0.7

(B) 0.1 ≤ P(An B) ≤ 0.2

(C) Ninguna de las anteriores

15. Sean A, B dos sucesos tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es P = 1/4. Entonces, la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra:

(A) Es menor que 0.4

(B) Es mayor que 0.6

(C) Ninguna de las anteriores

**PREGUNTAS TIPO DESARROLLO**

**Elija una sola opción y conteste a los problemas en hojas separadas.**

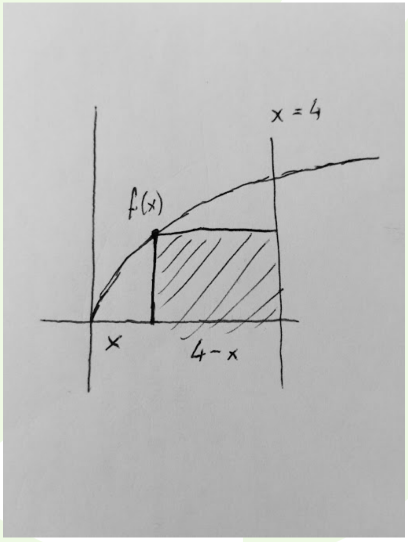
Opción 1

**1. Estudiar la existencia de inversa, según los valores del parámetro $a \in R$, para la matriz**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

**En el caso a = 1/2, calcular la traza (suma de los elementos de la diagonal) de $A^{-1}$**

**2. Calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse con su base en el eje horizontal y limitado por las curvas $y^2 = 8x$, $x = 4$ ¿Cuál es ese área?**




Opción 2

**3. Dados los planos $\pi_1: 2x - y + z = 3; \pi_2 = x - y + z = 2;\ \ \pi_3 = 3x - y - az = b$, determinar los valores de $a, b \in R$ para que definan una única recta y obtener un vector director de la misma.**

**4. Se reparten 5 papeletas de una tira numerada del 1 al 40. Calcular la probabilidad de que exactamente tres de las papeletas estén numeradas con múltiplos de 10 (no es necesario dar el resultado con decimales, basta con fracciones).**

# SOLUCIONES

**PREGUNTAS TIPO TEST**

**Conteste a un máximo de 10 cuestiones.**

1. Si A, B son matrices reales tales que es posible formar el producto AB y, además, rango(A) = 2 y rango (B) = 3, entonces rango(AB) es:

   (A) 6

   (B) 3

   (C) Ninguna de las anteriores

2. Si A es una matriz real m x n (con m distinto de n) y B es otra matriz tal que existen los productos AB y BA:

   (A) Entonces B es una matriz n x n

   (B) Entonces B es una matriz n x m

   (C) Ninguna de las anteriores

3. Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

   (A) Puede tener exactamente dos soluciones

   (B) Si tiene un número par (mayor que 0) de soluciones, tiene infinitas

   (C) Ninguna de las anteriores

4. Todo sistema de ecuaciones lineales que tiene más ecuaciones que incógnitas:

   (A) Es incompatible

   (B) Es compatible indeterminado

   (C) Ninguna de las anteriores

5. El valor de k € R para el cual los vectores u = (k, 1) y v = (6,3) son linealmente dependientes:

   (A) Puede ser negativo

   (B) Es impar

   (C) Ninguna de las anteriores

6. En el espacio vectorial R3:

(A) Puede haber un sistema generador con cuatro vectores

(B) Los elementos de todo sistema generador forman una base

(C) Ninguna de las anteriores

7. Dados los puntos del espacio A(1,7,11) y B(4, -2,17), otro punto alineado con ellos P(a, b, c) y tal que está a la mitad de distancia de A que de B, cumple:

(A) a + b +c = 19

(B) a • b• c < 0

(C) Ninguna de las anteriores

8. La funcion $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 7$

(A) Es decreciente en el intervalo (0,2)

(B) Es creciente en el intervalo (1,2)

(C) Ninguna de las anteriores

9. El límite $lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

(A) No existe

(B) Es igual a 0

(C) Ninguna de las anteriores

10. La integral $\int_0^{\pi} x + sinx\, dx$

(A) Es menor o igual que 0

(B) Es mayor que $\pi^2/2$

(C) Ninguna de las anteriores

11. La integral definida $I = \int_{-5}^{5} \frac{x^{2023}}{x^{2024}+2} dx$

(A) Cumple que I > 1

(B) Cumple que I < 1

(C) Ninguna de las anteriores

12. Se lanzan simultáneamente 4 monedas. La probabilidad de obtener, al menos, una cara:

(A) Es mayor que 0.8

(B) Es menor que 0.3

(C) Ninguna de las anteriores

13. Sean A, B,C sucesos arbitrarios de un experimento aleatorio. El suceso "ocurren exactamente dos sucesos de entre los A, B, C" se expresa:

(A) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(B) $(A \cap B \ \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$, donde la barra denota el suceso complementario

(C) Ninguna de las anteriores

14. Sean A, B dos sucesos tales que P (A) = 2/5, P(B) = 1/3 y P($\bar{A} \cap \bar{B}$) = 1/3, donde la barra denota el suceso complementario. Entonces:

(A) $0.6 \leq P(AUB) \leq 0.7$

(B) $0.1 \leq P(An\ B) \leq 0.2$

(C) Ninguna de las anteriores

15. Sean A, B dos sucesos tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es P = 1/4. Entonces, la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra:

(A) Es menor que 0.4

(B) Es mayor que 0.6

(C) Ninguna de las anteriores

**PREGUNTAS TIPO DESARROLLO**

**Elija una sola opción y conteste a los problemas en hojas separadas.**

Opción 1

**1. Estudiar la existencia de inversa, según los valores del parámetro $a \in R$, para la matriz**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

**En el caso a = 1/2, calcular la traza (suma de los elementos de la diagonal) de $A^{-1}$**

Una matriz tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Así, para ver cuándo hay inversa, calculamos el determinante y vemos cuándo vale cero. La matriz tendrá inversa para todos los valores de a salvo para estos.

Por Sarrus, el determinante es $|A| = a^3 - a^2 - a + 1$. Como es un polinomio de grado 3, buscamos sus ceros por Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | | |
| | | | 1 | |
| | | 1 | | |

Nos queda que 1 es una solución. Continuando con la fórmula cuadrática, las otras dos son 1 y -1. Por tanto, la matriz tendrá inversa para todos los valores de a salvo para 1 y -1.

En el caso en el que a=½, la matriz es

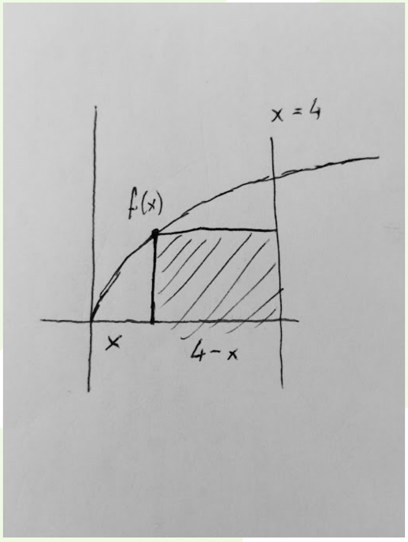
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular la inversa con la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA^t$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 2 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Sumando los términos de su diagonal, la traza es: $2 + 2 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} = 5{,}33$

**2. Calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse con su base en el eje horizontal y limitado por las curvas $y^2 = 8x$, $x = 4$ ¿Cuál es ese área?**




La curva $y^2 = 8x$ es una parábola horizontal, y la podemos escribir también como $y = \sqrt{8x}$ y $y = -\sqrt{8x}$. El área de un rectángulo es base por altura. Viendo el dibujo, la base es $4 - x$ y la altura es $f(x) = \sqrt{8x}$. También podríamos tomar solo la mitad de la altura, $\sqrt{8x}$. La altura será $A(x) = (4 - x)\sqrt{8x}$. Si queremos encontrar su máximo, derivamos e igualamos a cero.

$A' = -\frac{3x-4}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow x = 4/3$. Por tanto, la base será $4 - x = 4 - 4/3 = 8/3$, y la altura será $f(4/3) = \sqrt{32/3}$.

Opción 2

**3. Dados los planos $\pi_1: 2x - y + z = 3; \pi_2 = x - y + z = 2;\ \ \pi_3 = 3x - y - az = b$, determinar los valores de $a, b \in R$ para que definan una única recta y obtener un vector director de la misma.**

Si queremos que esos tres planos se crucen en una recta necesitamos que el sistema de ecuaciones que forman sea un SCI. El sistema en cuestión es

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases}$$

O, en forma matricial,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{pmatrix}$$

Para que esto sea un SCI necesitamos que los rangos de A y de A* sean 2.

Podemos estudiar los rangos a través de los determinantes. El determinante de A es a+1. Si queremos que la matriz A tenga rango 2 necesitamos que su determinante sea 0, es decir, que a=-1.

En cuanto al rango de A*, vamos a tomar la matriz formada por las dos primeras columnas y la última, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$$

Si calculamos el determinante, es -b+4. Como queremos que sea nulo, necesitamos $b = 4$. En ese caso, el rango de A* será 2 también.

Por tanto, si queremos que se corten en una recta, necesitaremos que $a = -1, b = 4$.

**4. Se reparten 5 papeletas de una tira numerada del 1 al 40. Calcular la probabilidad de que exactamente tres de las papeletas estén numeradas con múltiplos de 10 (no es necesario dar el resultado con decimales, basta con fracciones).**

En este caso disponemos de 4 papeletas que sean múltiplos de 40, dado que no hay reposición de las mismas sabemos que la probabilidad de sacar 4 de ellas será:

S: Es múltiplo de 10

N: No es múltiplo de 10

La probabilidad total que buscamos es:

$$P_T(3\ múltiplos\ de\ 10)\ = P(S\,S\,S\,N\,N)\ +\ P(S\,S\,N\,S\,N)\ +\ P(\,S\,S\,N\,N\,S)\ + P(S\,N\,S\,N\,S) + ..$$

$$...+ P(S\,N\,N\,S\,S)\ +\ P(\,N\,S\,N\,S\,S\,)\ + P(\,N\,N\,S\,S\,S\,)\ +\ P\,(N\,S\,S\,S\,N)$$

Vamos a calcular las dos primeras: la probabilidad de que la primera sea múltiplo de 10 es 4 (porque hay 4 múltiplos de 10) de cuarenta, la de que lo sea la segunda es 3 (porque solo quedan 3) de 39 (porque hemos quitado una), y así sucesivamente. Nos queda:

$$P(SSSNN) = \frac{4}{40}\frac{3}{39}\frac{2}{38}\frac{36}{37}\frac{35}{36}$$

Para la segunda, por el mismo argumento,

$$P(SSNSN) = \frac{4}{40}\frac{3}{39}\frac{36}{38}\frac{2}{37}\frac{35}{36}$$

Nos damos cuenta de que, para todas las combinaciones, el denominador será $40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36$, mientras que el numerador será $4\cdot 3\cdot 2\cdot 36\cdot 35$. Así, la probabilidad total buscada es $\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36}$ multiplicada por el número de combinaciones. ¿Cuantas combinaciones hay? De las cinco papeletas tenemos que elegir tres para que sean múltiplos de 10, así que tenemos $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ combinaciones. Juntándolo todo, la probabilidad es

$$P(3\ múltiplos\ de\ 10) = 10\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 36\cdot 35}{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36} = \frac{35}{13\cdot 19\cdot 37}.$$