EXAMEN MATEMÁTICAS II

Bienvenidos vivers!

Hoy es un día muy importante, hoy empezarás a entender las Matemáticas, o por lo menos esa es nuestra intención.
Para que veas que vamos en serio, te proponemos que le eches un ojo a este vídeo y que juzgues por ti mismo.

Para abrir boca, vamos a comenzar explicando cual es la estructura de la prueba de acceso a la universidad para alumnos extranjeros para la asignatura de Matemáticas II.

Estructura

La prueba consta de dos partes:

- Parte tipo test:
    - Formada por 10 preguntas con 3 opciones de respuesta.
    - Cada pregunta correcta suma 0,5 puntos. Las respuestas incorrectas restan y las preguntas sin responder no suman ni restan.
- Parte de problemas:
    - Formada por 2 problemas.
    - Cada problema puede sumar hasta 2,5 puntos, dependiendo del resultado, el desarrollo y la limpieza (los profesores valoran mucho el orden y la pulcritud).

La duración del examen es de una hora y media. Se recomienda emplear 30 minutos para resolver la parte tipo test y el resto del tiempo en los problemas.

Como ya sabéis el examen hay que hacerlo con bolígrafo y no se permite el uso de calculadoras programables, asique tened mucho cuidado con la calculadora que lleváis.

Ahora que ya sabemos a lo que nos enfrentamos, vamos a proceder a explicar y resolver el modelo de examen del año 2017.

Parte tipo Test

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y sea A^{-1} su matriz inversa. Entonces el elemento a_{22} de la segunda fila y segunda columna de la matriz inversa A^{-1} es:

a) 0.
b) -1.
c) 1.

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 8 + 0) - (6 + 0 - 8) = -2$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj (A)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{11}.a_{23}.a_{32})$$

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$
b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$
c) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Cuando se multiplican dos matrices, para obtener cada uno de los elementos que forman la matriz resultante, multiplicamos filas por columnas.
Mucho cuidado, el producto de matrices no respeta la propiedad conmutativa (AxB ≠ BxA).

3. El valor del límite $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{2x-3}$ es igual a:

a) 1.
b) 0.
c) 1/2.

Es necesario que el alumno conozca los tipos de indeterminaciones y cómo enfrentarse a las mismas.
En este ejercicio encontramos a una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *. Para resolver esta indeterminación se pueden emplear diferentes estrategias, como dividir todo entre la x elevada al mayor exponente o comparar los grados del polinomio del numerador y del denominador.*
Como el grado del numerador es menos que el denominador ($x^{1/2} < x^1$) y la x tiende a infinito, el infinito del denominador es predominante, y el límite tiende a cero.

4. La integral $\int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \cos(x)\, dx$ vale:

a) 0.
b) -1.
c) 2.

$$\int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \cos(x)\, dx = sen(x)]_{3\pi/2}^{5\pi/2} = sen\left(\frac{5\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

5. El vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = t - z \end{cases}$ es el vector:

a) (1, -1, 7).
b) (2, 3, 1).
c) (3, 2, -6).

Los coeficientes que acompañan al parámetro t son las coordenadas del vector director de la recta. Los términos independientes hacen alusión a las coordenadas de un punto perteneciente a la misma.

6. Los planos $\alpha \equiv x + y - 5z = -4$ y $\beta \equiv -3x - 3y + 15z = 1$:

a) Se cortan en una recta.
b) Son paralelos.
c) Son coincidentes.

$$\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -5 \\ D = 4 \end{cases} \qquad \beta \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \begin{cases} A' = -3 \\ B' = -3 \\ C' = 15 \\ D' = -1 \end{cases}$$

$$Secantes \rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$
$$Paralelos \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$
$$Coincidentes \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Las posiciones relativas de dos planos se pueden determinar estudiando los rangos de la matriz A (formada por los coeficientes de acompañan a las incógnitas) y la matriz A (formada por los coeficientes de acompañan a las incógnitas y los términos independientes) o comparando los coeficientes de ambos planos.*

7. La distancia del punto $A = (1, 2, 5)$ al plano $\alpha \equiv 2x + 2y - z - 5 = 0$ vale:

a) 5/3.
b) 2/3.
c) 4/3.

$$d(A, \alpha) = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{cases} A = (a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 5) \\ \alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow 2x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$d(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + (-5)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

Las distancias son magnitudes escalares positivas.

8. Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, la afirmación P(AUB) = P(A) + P(B) es correcta:

a) Si A y B son sucesos disjuntos.
b) Si A y B son sucesos independientes.
c) Para cualquier par de sucesos A y B.

Dos sucesos son disjuntos o incompatibles si no tienen ningún elemento en común (su intersección es el conjunto vacío), es decir, $P(A \cap B) = 0$ *y por lo tanto se cumple que* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.
Dos sucesos son independientes cuando la probabilidad de que ocurra un suceso no depende de la probabilidad de que suceda el otro.

9. Si A y B son sucesos tales que P(A) = 3 y P(B/A) = 0,45, entonces P(A∩B) vale:

a) 0,135.
b) 0,15.
c) 0,25.

$$Probabilidad\ condicionada\ \rightarrow\ P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}3 \cdot 0{,}45 = 0{,}135$$

10. Una población está compuesta en un 60 % de mujeres. El 14 % de las mujeres y el 22 % de los hombres son fumadores. Si una persona elegida al azar fuma, la probabilidad de que sea una mujer es:

a) 0,342.
b) 0,488.
c) 0,556.

	Mujeres (A)	**Hombres $(\overline{A})$**	**TOTAL**
Fumadores (B)	0,14	0,22	0,36
No fumadores $(\overline{B})$	0,46	0,18	0,64
TOTAL	0,60	0,40	1,00

$$Prob.\ condicionada\ \rightarrow\ P(Mujer/Fumador) = P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0{,}14}{0{,}36} = 0{,}388$$

Con ánimo de facilitar la resolución de este problema, elaboraremos una tabla de contingencia con la información que nos dan. De esta forma identificaremos los sucesos y la relación que hay entre ambos.
Como se puede observar son sucesos dependientes, ya que la probabilidad de que ocurra uno depende de la probabilidad de que ocurra el otro.

Las respuestas de las preguntas son: 1c), 2c), 3b), 4c), 5b), 6b), 7c), 8a), 9a), 10a).

Parte de problemas

Problema 1. Se desea recargar el cajero de un banco con billetes de 10, 20 y 50 euros. Por cada 5 billetes de 50 se ha de introducir 1 de 20, mientras que por cada 2 billetes de 20 se han de introducir 3 de 10.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la proporción de cada una de las denominaciones de billetes que hay introducir en el cajero.

b) Resolver el sistema mediante la regla de Cramer.

c) Si el importe total en euros de todos los billetes ha de ser 28.500 euros ¿cuánto billetes de cada denominación hay que introducir en el cajero?

a)

$$Definimos\ las\ variables\ \rightarrow \begin{cases} x: Número\ de\ billetes\ de\ 10€ \\ y: Número\ de\ billetes\ de\ 20€ \\ z: Número\ de\ billetes\ de\ 50€ \end{cases}$$

$$Sistema\ de\ ecuaciones\ \rightarrow \begin{cases} \frac{5}{1} = \frac{z}{y} \\ \frac{2}{3} = \frac{y}{x} \end{cases}$$

b)

Ordeno el sistema y despejo las ecuaciones en función de la misma incógnita.

$$\begin{cases} 5y - z = 0; z = -5y \\ 2x - 3y = 0; 2x = 3y \end{cases}$$

Genero la matriz A formada por los coeficientes que acompañan a las incógnitas, y la matriz A formada por los coeficientes que acompañan a las incógnitas más la columna de resultados, igualando la incógnita colocada al otro lado del igual a un parámetro.*

$$y = t\ \rightarrow \begin{cases} 0x + z = -5t \\ 2x + 0z = 3t \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\ y\ A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5t \\ 2 & 0 & 3t \end{pmatrix}$$

Para calcular el valor las incógnitas x y z efectúo el cociente entre el determinante de la matriz A cambiado la columna asociada a la incógnita que vamos a estudiar por la columna de los resultados, y el determinante de la matriz A.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5t & 1 \\ 3t & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-5t)\cdot 0 - 3t\cdot 1}{0\cdot 0 - 2\cdot 1} = \frac{-3t}{-2} = \boxed{\frac{3t}{2}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5t \\ 2 & 3t \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0\cdot 3t - (-5t)\cdot 2}{0\cdot 0 - 2\cdot 1} = \frac{10t}{-2} = \boxed{-5t}$$

c)

Volvemos a plantear el sistema añadiendo la nueva información.

$$Sistema\ de\ ecuaciones \rightarrow \begin{cases} \frac{5}{1} = \frac{z}{y} \\ \frac{2}{3} = \frac{y}{x} \\ 10x + 20y + 50z = 28.500 \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema de varias maneras, ya sea aplicando Cramer, Gauss u otras metodologías.
Como no me especifican que método utilizar, vamos a resolver el sistema de ecuaciones mediante sustitución, aprovechando las operaciones realizadas en el apartado anterior.

$$\begin{cases} z = 5y \\ x = \frac{3y}{2} \\ 10x + 20y + 50z = 28.500 \end{cases} \rightarrow 10\left(\frac{3y}{2}\right) + 20y + 50(5y) = 28.500 \rightarrow y$$

$$\boldsymbol{Soluciones} \begin{cases} x = \frac{3y}{2} = 150 \\ y = 100 \\ z = 5y = 500 \end{cases}$$

<u>Problema 2.</u> Los beneficios netos de una empresa, en millones de euros, se pueden aproximar mediante la expresión:

$$f(t) = \frac{30t - 60}{5t + 7}$$

Donde t > 0 representa los años de vida de la empresa.

a) Explicar razonadamente a partir de qué año la empresa obtiene beneficios netos no negativos.

b) ¿Pueden crecer indefinidamente los beneficios netos de la empresa a medida que transcurre el tiempo t? En caso afirmativo, justificarlo formalmente. En caso negativo, determinar un valor que limite superiormente dichos beneficios netos.

a)

Para saber a partir de qué año la empresa obtiene beneficios estudio el signo del numerador, ya que es el que marca el signo de la función.

$$30t - 60 = 0 \ \rightarrow t = 2$$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}: A\ partir\ del\ segundo\ año\ la\ empresa\ empieza\ a\ obtener\ beneficios.$$

b)

Para estudiar cuál va a ser la tendencia de la cuantía de los beneficios de la empresa a medida que transcurre el tiempo, estudio el límite de la función que marca dichos beneficios cuando el tiempo tiende a un valor muy grande.

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{30t - 60}{5t + 7} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim_{t \to +\infty} \frac{30t - 60}{5t + 7} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n}: Los\ beneficios\ de\ la\ empresa\ no\ crecen\ indefinidamente\ a\ lo\ largo\ del\ tiempo,$$
$$el\ valor\ que\ limita\ los\ beneficios\ netos\ es\ 6\ millones\ de\ euros$$

Pues ‘esto es todo amigos’, espero que os hayáis enterado y que esta sea la primera de muchas visitas.

Ha sido un placer. Nos vemos en el próximo vídeo. ¡Hasta pronto!