EXAMEN MATEMÁTICAS II

Universidad Complutense de Madrid

Convocatoria Ordinaria. Curso 2017-2018

OPCIÓN A

1.

a)

$$A=\begin{pmatrix}1 & m & 0\\ -2 & -(m+1) & 1\\ 1 & 2m-1 & m+2\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}1 & m & 0 & 1\\ -2 & -(m+1) & 1 & -1\\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m\end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & m & 0\\ -2 & -(m+1) & 1\\ 1 & 2m-1 & m+2\end{vmatrix}=m^2-1\rightarrow |A|=m^2-1=0\rightarrow m=\pm 1$$

- Cuando $m\neq\pm 1\rightarrow RgA=3$
- Cuando $m=\pm 1\rightarrow RgA=2\rightarrow |A|_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}\neq 0$

Estudiamos el rango de A*:

- Cuando $m\neq\pm 1\rightarrow RgA^*=3\rightarrow |A^*|=|A|\neq 0$
- Cuando $m=-1\rightarrow RgA^*=3\rightarrow |A^*|_3=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

- Cuando $m=1\rightarrow RgA^*=2\rightarrow |A^*|_3=0\rightarrow |A^*|_2=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}\neq 0$

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ -2 & -2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

Conclusión:

- **Cuando $\boldsymbol{m \neq \pm 1 \rightarrow RgA = RgA^* = 3 \rightarrow SCD}$**
- **Cuando $\boldsymbol{m = -1 \rightarrow RgA \neq RgA^* \rightarrow SI}$**
- **Cuando $\boldsymbol{m = 1 \rightarrow RgA = RgA^* = 2 \rightarrow SCI}$**

b)

Cuando m = 0 el sistema tiene una única solución para cada incógnita (SCD)

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 - y + z = -1 \\ 1 - y + 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solución: x = 1, y = -1, z = 0

2.

a)

Para calcular el valor que debe tener ‘x’ para que el error sea mínimo derivamos e igualamos a cero:

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$$

$$E'(x) = 2(x - m_1) + 2(x - m_2) + 2(x - m_3) + 2(x - m_4) + 2(x - m_5) = 2(5x - 4{,}51)$$

$$E'(x) = 0 \rightarrow 2(5x - 4{,}51) = 0 \rightarrow x = 0{,}912$$

$$Comprobamos\ que\ en\ x = 0{,}912\ hay\ un\ mínimo: E''(0{,}912) = 10 > 0 \rightarrow Hay\ un\ mínimo$$

Solución: En x = 0,912 hay un mínimo.

b)

$$I = \int_1^2 x^2 \cdot \ln(x)\, dx \rightarrow \begin{cases} u = \ln(x) \rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = x^2 dx \rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$I = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \rightarrow I = \int x^2 \cdot \ln(x)\, dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$I = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

$$I = \int_1^2 x^2\cdot\ln(x)\,dx = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big]_1^2 = \left(\ln(2)\cdot\frac{8}{3} - \frac{8}{9}\right) - \left(\ln(1)\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = \ln(2)\cdot\frac{8}{3} - \frac{7}{9}$$

Solución: $\boldsymbol{I = \ln(2)\cdot\frac{8}{3} - \frac{7}{9}}$

3.

a)

Los planos dados son paralelos porque sus vectores normales son proporcionales:

$$\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0 \to \overrightarrow{n_1} = (4, 6, -12)$$
$$\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \to \overrightarrow{n_2} = (-2, -3, 6)$$

Para calcular el volumen del cubo necesitamos conocer la distancia que hay entre los planos.

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \left|\frac{-2(0) - 3(0) + 6\left(-\frac{1}{6}\right) - 5}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 6^2}}\right| = \frac{9}{14} \to P = (0, 0, -\tfrac{1}{6}) \in \pi_1$$

Solución: El volumen del cubo será: $\boldsymbol{V = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = 11,4\ u^3}$

b)

Sabemos que el punto C pertenece a la recta intersección de los planos π_2 y π_3.

$$r\begin{cases}\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y + z - 2 = 0\end{cases} \to r\begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda \\ y = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda \\ z = \lambda\end{cases} \to C = \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda, -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda, \lambda\right)$$

Al tratarse de un cuadrado de lados consecutivos ABCD, los vectores AB y BC son perpendiculares entre sí, es decir:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \to (-1, 1, 0)\cdot\left(\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda\right) - 1, \left(-\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda\right) - 2, \lambda - 3\right) = 0$$

$$(-1, 1, 0)\cdot\left(\frac{-4}{5} + \frac{3}{5}\lambda, -\frac{19}{5} + \frac{8}{5}\lambda, \lambda - 3\right) = 0 \to \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\lambda - \frac{19}{5} + \frac{8}{5}\lambda = 0 \to \lambda = 3 \to C = (2, 3, 3)$$

Como se trata de un cuadrado, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ son equipolentes, por lo que:

$$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{DC} \rightarrow (-1,1,0) \equiv (x-2, y-3, z-3) \rightarrow D = (x,y,z) = (3,2,3)$$

Solución: $\boldsymbol{C = (2,3,3)\ y\ D = (3,2,3)}$

4.

a)

Sabemos que el 60 % de los artículos están rebajados, es decir: P(R) = 0,6
Entonces el porcentaje de artículos que no están rebajados es: P(NR) = 1 – P(R) = 0,4
Además, el 15 % de los productos rebajados se devuelven: P(D/R) = 0,15
Los artículos devueltos no están rebajados son el 8 %: P(D/NR) = 0,08

El porcentaje de artículos devueltos será:

$$P(D) = P(R) \cdot P\left(\frac{D}{R}\right) + P(NR) \cdot P\left(\frac{D}{NR}\right) = 0{,}6 \cdot 0{,}15 + 0{,}4 \cdot 0{,}08 = 0{,}122$$

Solución: El porcentaje de artículos devueltos es del 12,2 %

b)

El porcentaje de artículos devueltos adquiridos con precios rebajados será:

$$P(R/D) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{P(R) \cdot P\left(\frac{D}{R}\right)}{P(D)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}15}{0.122} = 0{,}737$$

Solución: El porcentaje de artículos devueltos adquiridos con precios rebajados es del 73,7 %

OPCIÓN B

1.

a)

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4m-4)-(m^2) = -m^2-4m-4$$

$$|A| = 0 \rightarrow -m^2-4m-4 = 0 \rightarrow m = -2$$

Solución: La matriz A no tiene inversa cuando m = -2

b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^{-1} \cdot B$:

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \; y \; Adj\ A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boldsymbol{A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

c)

Calculamos $B \cdot B^T$:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $B^T \cdot B$:

$$B^T \cdot B = (-2 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (4)$$

Solución: $\boldsymbol{B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ **y** $\boldsymbol{B^T \cdot B = (4)}$

2.

La función dada es:

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} \to f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es: D = R

a)

Comprobamos si existen asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\infty}{\infty} \to \lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{\infty}{\infty} \to \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \end{cases}$$

NOTA: Resolvemos los límites por jerarquía de infinitésimos o aplicando L´Hôpital.

Solución: Como $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$ la función tiene una asíntota horizontal en y = 1.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+9} - x\cdot\frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+9} = \dfrac{\sqrt{x^2+9} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{-1\cdot\sqrt{x^2+9} - (-x)\cdot\frac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+9} = \dfrac{-\sqrt{x^2+9} + \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} & si\ x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{(x^2+9)-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = \dfrac{9}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}} & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{\dfrac{-(x^2+9)+x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = \dfrac{-9}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}} & si\ x < 0 \end{cases}$$

Solución: $\boldsymbol{f'(4) = \frac{9}{(4^2+9)\cdot\sqrt{4^2+9}} = \frac{9}{125}}$

c)

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

$$I = \int_{-1}^{0} -x\cdot(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int_{0}^{1} x\cdot(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$I = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 2x\cdot(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2x\cdot(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$I = -\frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg]_{0}^{1} = -(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\Big]_{-1}^{0} + (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\Big]_{0}^{1}$$

$$I = \left[-(0^2+9)^{\frac{1}{2}} + ((-1)^2+9)^{\frac{1}{2}}\right] + \left[(1^2+9)^{\frac{1}{2}} - (0^2+9)^{\frac{1}{2}}\right] = \left(-3+\sqrt{10}\right) + \left(\sqrt{10}-3\right)$$

Solución: $\boldsymbol{I = -6 + 2\sqrt{10}\ uds^2}$

3.

a)

La distancia del punto P (1, 1, 1) a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$ se calcula aplicando la fórmula:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{u_r}\ x\ \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}}$$

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases} \to \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 6-5\lambda \end{cases} \to \begin{cases} A = (0,2,6) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-2,-5) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AP} = (1,-1,-5) \to \begin{cases} A = (0,2,6) \\ P = (1,1,1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_r}\, x\, \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 5\vec{\imath} + \vec{k} = (5,0,1) \to \left|\overrightarrow{u_r}\, x\, \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{5^2+0^2+1^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{30}$$

Solución: $\boldsymbol{La\ distancia\ entre\ el\ punto\ P\ y\ la\ recta\ r\ es}: \boldsymbol{d(P,r)} = \sqrt{\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{15}}}\ \boldsymbol{u}$

b)

Para estudiar la posición relativa de las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$ estudiamos el producto escalar de sus vectores directores:

$$s \to \begin{cases} B = (2,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,1/3\,) \end{cases} ;\ r \to \begin{cases} A = (0,2,6) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-2,-5) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} \neq 0 \begin{cases} Las\ rectas\ se\ cruzan \to No\ son\ coplanarias \\ Las\ rectas\ se\ cortan \to Son\ coplanarias \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1/3 \end{vmatrix} \neq 0 \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2,-3,-5) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-2,-5) \\ \overrightarrow{u_s} = \left(-1,1,\frac{1}{3}\right) \end{cases} \to Las\ rectas\ se\ cruzan$$

Solución: $\boldsymbol{Las\ rectas\ se\ cruzan}.$

c)

El plano buscado es perpendicular a la recta s, por lo que el vector normal del dicho plano es igual o proporcional al vector director de la recta.

$$\alpha \begin{cases} P = (1,1,1) \\ \vec{n} = \overrightarrow{u_s} = \left(-1,1,\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$\alpha \equiv \overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0 \to\ \alpha \equiv (x-1, y-1, z-1) \cdot \left(-1,1,\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\alpha \equiv -x + 1 + y - 1 + \frac{z}{3} - \frac{1}{3} = 0 \to \alpha \equiv -x + y + \frac{z}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

Solución: $\boldsymbol{El\ plano\ buscado\ es}: \boldsymbol{\alpha \equiv -x + y + \frac{z}{3} - \frac{1}{3} = 0}$

4.

a)

La variable de estudio es discreta y se ajusta a una distribución binomial, ya que sigue un esquema éxito-fracaso.

$$X = '\text{número de piezas defectuosas}' \begin{cases} \text{Éxito}: \text{Obtener una pieza defectuosa} \\ \text{Fracaso}: \text{No obtener una pieza defectuosa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Probabilidad de éxito} \rightarrow p = P(D) \\ \text{Probabilidad de fracaso} \rightarrow q = P(ND) = 1 - p \end{cases}$$

$$P(D) = P(A) \cdot P\left(\frac{D}{A}\right) + P(B) \cdot P\left(\frac{D}{B}\right) = 0{,}75 \cdot 0{,}025 + \; 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}031$$

Siendo: $P(A) = 0{,}75$; $P(B) = 0{,}25$; $P(D/B) = 0{,}05$; $P(D/A) = 0{,}025$

Solución: La probabilidad de que una pieza elegida al azar de una muestra de 5.000 piezas sea defectuosa es del 3,1 %, por lo que el número de piezas defectuosas en este caso será de:

$$\boldsymbol{np = 5000 \cdot 0{,}031 = 155\, piezas}$$

b)

La variable sigue una distribución binomial.

$$B(n, np) \sim \begin{cases} n = 6000 \rightarrow \text{Tamaño de la nueva muestra} \\ p = 0{,}025 \rightarrow \text{Se fabricaron productos exclusivamente del tipo A} \end{cases}$$

En este caso, podemos aproximar la distribución binomial a una distribución normal, ya que los parámetros cumplen los siguientes requisitos:

$$B(n, np) \sim \begin{cases} n = 6000 > 30 \\ np = 6000 \cdot 0{,}025 = 150 > 5 \end{cases} \rightarrow N(\mu, \sigma) = N\left(np, \sqrt{npq}\right) = (150;\; 12{,}1)$$

Como estamos aproximando una variable discreta en la que p(x = k) ≠ 0, a una continua en la que p(x = k) = 0, debemos efectuar una correlación de continuidad cuando calculemos la probabilidad, de tal modo que al intervalo obtenido se le aplicará una corrección de 0,5, es decir: (k-0,5; k+0,5).

La probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas será:

$$P(X > 160) = 1 - P(X \leq 160) \rightarrow \text{Tipificamos la variable}: Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 150}{12{,}1}$$

$$1 - P(X \leq 160) = 1 - P\left(\frac{X - 150}{12{,}1} \leq \frac{160 - 150}{12{,}1}\right) = 1 - P(Z \leq 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = 0{,}1922$$

Solución: $\boldsymbol{P(X > 160) = 19{,}22}\%$