EXAMEN MATEMÁTICAS UNED

Convocatoria Extraordinaria. Curso 2019-2020

CUESTIONES TIPO TEST

1. La distancia entre los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ y $\pi_2 \equiv x+y+z=3$ es:
   a) $2\sqrt{3}$
   b) 2
   c) $2/\sqrt{3}$

   Los planos dados son paralelos, ya que sus vectores normales son iguales.
   La distancia entre dos planos paralelos se calcula aplicando la siguiente fórmula:

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|A\cdot p_1+B\cdot p_2+C\cdot p_3+D|}{|\overrightarrow{n_{\pi_2}}|}\begin{cases} P=(p_1,p_2,p_3)\in \pi_1 \\ \pi_2\equiv Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$$

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\begin{cases} P=(0,0,1)\in \pi_1 \\ \pi_2\equiv x+y+z-3=0\rightarrow \overrightarrow{n_{\pi_2}}(1,1,1)\end{cases}$$

2. Las rectas $r: x-1=y+1=z-2$ y $s: x+2=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{4}$:
   a) No se cortan en ningún punto
   b) Se cortan en un único punto
   c) Son coincidentes

   Para saber cual es la posición relativa de las rectas *r* y *s* estudiamos la posición de sus vectores directores:

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,4)\end{cases}\rightarrow \overrightarrow{u_r}\neq\overrightarrow{u_s}$$

$$Como\ \overrightarrow{u_r}\neq\overrightarrow{u_s}\begin{cases} Se\ cortan \rightarrow \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\ pertenecen\ al\ mismo\ plano \\ Se\ cruzan \rightarrow \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\ no\ pertenecen\ al\ mismo\ plano\end{cases}$$

$$Por\ ejemplo\begin{cases} Recta\ r: P=(2,0,3) \\ Recta\ r: Q=(-1,0,5)\end{cases}\rightarrow \overrightarrow{PQ}=(2,0,3)-(-1,0,5)=(3,0,-2)$$

$$[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]=\begin{vmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=(12-4+0)-(-2+6+0)=4\neq 0\rightarrow Son\ vectores\ L.I.$$

$$\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\ no\ pertenecen\ al\ mismo\ plano\rightarrow \boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}$$

3. La recta r y el plano π dados por:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad y \ \pi \equiv x+y+z=1$$

a) Se cortan en un punto
b) La recta r está contenida en el plano π
c) No se cortan en ningún punto

Estudiamos la posición de los vectores directores de la recta r y del plano π:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,2) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (1,1,1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Se\ cortan\ en\ un\ punto \rightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi} \neq 0 \\ Recta\ perteneciente\ al\ plano \rightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi} = 0\ y\ P \in \pi \\ Recta\ paralela\ al\ plano \rightarrow \overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi} = 0\ y\ P \notin \pi \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi} = (2,-1,2)\cdot(1,1,1) = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3 \neq 0 \rightarrow \boldsymbol{r\ y\ \pi\ son\ secantes}$$

4. La ecuación del plano que pasa por los puntos P(1, 0, 0); Q(0, 1, 0) y R(0, 0 ,1) es:
a) $x+y+z=1$
b) $x+y-z=1$
c) $2x+y-2z=1$

Si el plano pasa por los puntos P, Q y R entonces los puntos pertenecen a ese plano y cumplirán la ecuación, por lo tanto:

$$\pi \equiv \boldsymbol{x+y+z=1} \rightarrow \begin{cases} P(1,0,0) \rightarrow 1+0+0=1 \\ Q(0,1,0) \rightarrow 0+1+0=1 \\ R(0,0,1) \rightarrow 0+0+1=1 \end{cases}$$

5. El coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, siendo P(1, 0, 1); Q(2, 1, -1) y R(1, 2 ,1) es:
a) $1/3$
b) $-\sqrt{3}/6$
c) $\sqrt{6}/6$

Hallamos, en primer lugar, las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$:

$$\begin{cases} P = (1,0,1) \\ Q = (2,1,-1) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2,1,-1) - (1,0,1) = (1,1,-2)$$

$$\begin{cases} P = (1,0,1) \\ R = (1,2,1) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{PR} = (1,2,1) - (1,0,1) = (0,2,0)$$

El coseno del ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ será:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|} = \frac{(1,1,-2)\cdot(0,2,0)}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+0^2}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

6. El área del paralelogramo formado por los vertices A(1, 1, 0); B(0, 2, 2); C(3, 3, 0) y D(2, 4 ,2) es:
   a) 8
   b) $2\sqrt{2}$
   c) $4\sqrt{3}$

A la hora de obtener el área de un paralelogramo no hay que olvidar que los vectores que empleamos durante el proceso tienen que partir del mismo vértice, luego:

$$A_p = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{48} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} A(1,1,0) \\ B(0,2,2) \\ C(3,3,0) \\ D(2,4,2) \end{cases} \to \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,2,2) - (1,1,0) = (-1,1,2) \\ \overrightarrow{AD} = (2,4,2) - (1,1,0) = (1,3,2) \end{cases} \to \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

7. La ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r: \frac{x+1}{2} = y = z + 1 \;\; y \;\; s: \frac{x-5}{2} = y - 4 = z$$

Es:
   a) $3x - 4y - 2z + 1 = 0$
   b) $x + 2y + 3z = 1$
   c) $x + 4y - z = 0$

Si el plano contiene a las rectas *r* y *s* su vector normal es perpendicular simultáneamente a los vectores directores de las rectas, es decir, el vector normal del plano se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores directores de *r* y *s.*

Cuando las rectas son paralelas (sus vectores directores son iguales o proporcionales) esta estrategia no sirve. En este caso, para hallar el vector normal del plano multiplicaremos el vector director de una de las rectas por otro vector formado por un punto de cada recta (vector también perteneciente al plano y por ende perpendicular al vector normal del mismo).

$$Rectas\ paralelas \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \end{cases} \to \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ A = (1,1,0) \in r \\ B = (3,3,-1) \in s \end{cases}$$

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k} \to \overrightarrow{n_\pi} = (-3,4,2)$$

El vector $\overrightarrow{n_\pi}$ será un vector igual o proporcional al calculado anteriormente, por ejemplo:

$$\overrightarrow{n_\pi} = (3,-4,-2) \to \boldsymbol{\pi \equiv 3x - 4y - 2z + D = 0}$$

8. La ecuación del plano que es ortogonal a la recta: $r:\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$ y pasa por el punto P(1, 0, -1) es:
   a) $x-3y+2z+1=0$
   b) $2x+y+3z+1=0$
   c) $3x+y+3=0$

   Para definir un plano es necesario conocer un vector perpendicular al mismo y un punto.
   Si el plano que buscamos es perpendicular a la recta *r* el vector director de dicha recta coincidirá con un vector normal del plano.

$$r\begin{cases} \pi_1 \equiv x+y-z=2 \\ \pi_2 \equiv x-2y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_{\pi_1}}=(1,1,-1) \\ \overrightarrow{n_{\pi_2}}=(1,-2,0) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{n_{\pi_1}}\times\overrightarrow{n_{\pi_2}}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-2\vec{\imath}-\vec{\jmath}-3\vec{k}$$

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-2,-1,-3)=(A,B,C) \\ P(1,0,-1) \end{cases} \rightarrow \pi \equiv -2x-y-3z-1=0$$

$$\pi \equiv -2x-y-3z+D=0 \rightarrow P\in\pi \rightarrow -2\cdot 1-0-3\cdot(-1)+D=0 \rightarrow D=-1$$

   Todos los planos iguales o proporcionales a: $\pi \equiv -2x-y-3z-1=0$ son el mismo, por lo tanto la solución del ejercicio es: $\boldsymbol{\pi \equiv 2x+y+3z+1=0}$

9. El rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es:
   a) Uno
   b) Dos
   c) Tres

   El rango de una matriz indica el número de líneas linealmente independientes que dicha matriz posee. Que su determinante sea distinto de cero implica que todas sus filas o columnas son independientes entre sí, por eso para calcular el rango de A analizamos sus determinates:

$$|A|_3=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(-8+1+1)-(-2-2-2)=-6-(-6)=0 \rightarrow Rg\,A\neq 3$$

$$|A|_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1-(-2)=3\neq 0 \rightarrow \boldsymbol{Rg\,A=2}$$

10. El conjunto de soluciones del sistema: $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x-y+2z=-3 \end{cases}$ es:
   a) $\{(\lambda,1-3\lambda,-1-2\lambda):\lambda\in R\}$
   b) $\{(1-3\lambda,\lambda,-1-2\lambda):\lambda\in R\}$
   c) $\{(-1-2\lambda,1-3\lambda,\lambda):\lambda\in R\}$

Dado que es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (nº ecs. < nº incógn.), se trata de un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \rightarrow y = 1 - 3x \\ x - y + 2z = -3 \end{cases} \rightarrow x - (1 - 3x) + 2z = -3 \rightarrow 4x + 2z = -2 \rightarrow z = -1 - 2x$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \lambda} \\ \boldsymbol{y = 1 - 3x = 1 - 3\lambda} \quad \boldsymbol{\forall \lambda \in R} \\ \boldsymbol{z = -1 - 2\lambda} \end{cases}$$

11. El Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

a) Tiene una única solución
b) No tiene solución
c) Tiene infinitas soluciones

Discutimos el sistema usando el Teorema de Rouché-Frobenius:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A|_3 = 0;\ |A|_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rg\ A = 2$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A|_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rg\ A^* = 3$$

Luego, como $Rg\ A^* \neq Rg\ A$ se trata de un sistema incompatible y **no tiene solución**.

12. Si la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene como determinante -3, entonces el determinante de la matriz B dada por $B = \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{pmatrix}$ es:

a) Det (B) = 3
b) Det (B) = -3
c) Det (B) = 9

Aplicando las propiedades de los determinantes tenemos:

$$|B| = \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot 3 = \mathbf{3}$$

13. La inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz de orden 2 hallaremos su inversa usando el método de Gauss-Jordan.

$$(\,B\mid I\,) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F_1 + F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (\,I\mid B^{-1})\rightarrow \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

14. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz AB es:

a) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
b) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
c) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Operamos:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+0\cdot 3 & 2\cdot 2+0\cdot 0 \\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 3 & 0\cdot 2+(-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

15. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz *A + 2I*, siendo *I* la matriz identidad, es:

a) 5
b) 8
c) 2

Efectuando la operación que se indica en el enunciado obtenemos:

$$A+2I = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 3 & 0 \\ 1 & -1+2 & 4 \\ -2 & 0 & 1+2 \end{pmatrix}$$

Siendo la suma de los elementos de la diagonal principal: $S = 4 + 1 + 3 = \mathbf{8}$

Respuestas correctas: 1c), 2a), 3a), 4a), 5c), 6c), 7a), 8b), 9b), 10a), 11b), 12a), 13c), 14b) y 15b)

PROBLEMAS MODELO 1

1. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3}$$

a) Describa el conjunto de puntos donde la función es continua.
b) Estudie si tiene asíntotas y en caso afirmativo calcule sus ecuaciones.
c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y en el caso de existir calcule los extremos relativos.
d) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de *f*.

a)

La función no existe cuando el denominador se anula, es decir:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} \to x+3=0 \to x=-3 \to D = R - \{-3\}$$

Solución: La función es continua en todo el conjunto de los números reales menos en el punto x = -3

b)

Estudiamos la existencia de asíntotas:

- Asíntotas verticales:

  Como hemos estudiado en el apartado anterior, la función es continua en todos los números reales excepto en x = -3. Veamos si hay asíntotas verticales en ese punto.

$$A.V. en\ x=-3 \to \lim_{x\to -3} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{x-2}{x+3} = \frac{-2{,}999\ldots 9 - 2}{-2{,}999\ldots 9 + 3} = -\infty \\ \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{x-2}{x+3} = \frac{-3{,}000\ldots 1 - 2}{-3{,}000\ldots 1 + 3} = +\infty \end{cases}$$

  Conclusión: Hay una asíntota vertical en x = -3.

- Asíntotas horizontales:

  Para que la función tenga asíntotas horizontales tiene que existir su límite cuando 'x' tiende a infinito y ser un número:

$$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-2}{x+3} = 1^- \\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-2}{x+3} = 1^+ \end{cases}$$

  Conclusión: Hay una asíntota horizontal en y = 1.

NOTA: Cuando hay A. H. no hay asíntotas oblicuas.

c)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento necesitamos establecer unos intervalos de estudio. Para ello tenemos en cuenta:

- Dominio de la función: $D = R - \{-3\}$
- Puntos críticos: Máximos y mínimos $\rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow No\ hay\ ni\ máximos\ ni\ mínimos\ relativos$

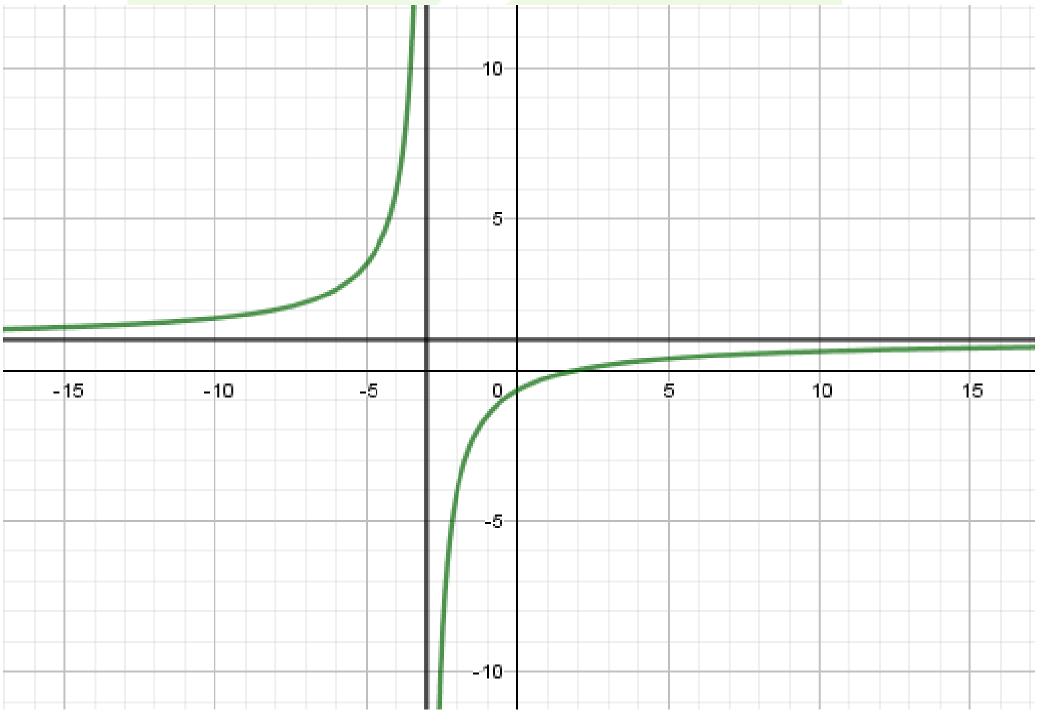
$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (x+3) - 1 \cdot (x-2)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow 5 \neq 0 \rightarrow No\ tiene\ solución$$

Con los datos anteriores establecemos los siguientes intervalos:

$(-\infty, \mathbf{-3})$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(\mathbf{-3}, +\infty)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo

d)



2. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{-2x^3+3x+3}{x^2+1}\, dx$

b) $\int \frac{tg2\cdot x}{1+4x^2}\, dx$

c) $\int \frac{\cos x}{5+3sen\, x}\, dx$

a)

$$\int \frac{-2x^3+3x+3}{x^2+1}\, dx \rightarrow Integral\ racional\ impropia\ (grado\ P(x) > grado\ Q(x))$$

$$I = \int \frac{-2x^3+3x+3}{x^2+1}\, dx \rightarrow Efectuamos\ la\ división\ de\ polinomios{:}\ D = C\cdot d + R\ \rightarrow \frac{D}{d} = C + \frac{R}{d}$$

$$I = \int \frac{-2x^3+3x+3}{x^2+1}\, dx = \int \left[-2x + \left(\frac{5x+3}{x^2+1}\right)\right] dx = \int -2x\, dx + \int \frac{5x+3}{x^2+1}\, dx$$

$$I = \int -2x\, dx + \int \frac{5x+3}{x^2+1}\, dx = \int -2x\, dx + \int \frac{5x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{3}{x^2+1}\, dx$$

$$I = \int -2x\, dx + \int \frac{5x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{3}{x^2+1}\, dx = -2\int x\, dx + 5\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$I = -2\int x\, dx + 5\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + 3\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = -x^2 + \frac{5}{2}\, Ln\,(x^2+1) + 3\, arctg(x) + C$$

Solución: $\boldsymbol{I = -x^2 + \frac{5}{2}\, Ln\,(x^2+1) + 3\, arctg(x) + C}$

b)

$$\int \frac{tg2\cdot x}{1+4x^2}\, dx = tg2\int \frac{x}{1+4x^2}\, dx = tg2\cdot\frac{1}{8}\int \frac{8x}{1+4x^2}\, dx = \frac{tg2}{8}\cdot Ln(1+4x^2) + C$$

Solución: $\boldsymbol{I = \frac{tg2}{8}\cdot Ln(1+4x^2) + C}$

c)

$$\int \frac{\cos x}{5+3\,senx}\,dx \rightarrow Realizamos\ un\ cambio\ de\ variable \begin{cases} u = sen\,x \\ du = \cos x\,dx \rightarrow dx = \dfrac{du}{\cos x} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{\cos x}{5+3\,senx}\,dx = \int \frac{\cos x}{5+3\,u}\cdot\frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{5+3\,u} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,du}{5+3\,u} = \frac{1}{3}\,Ln\,(5+3u)+C$$

$$Deshaciendo\ el\ cambio\ de\ variable: u = sen\,x \rightarrow I = \frac{1}{3}\,Ln\,(5+3\,senx)+C$$

Solución: $\boldsymbol{I = \frac{1}{3}\,Ln\,(5+3\,senx)+C}$

PROBLEMAS MODELO 2

1. Responda a las siguientes preguntas justificando las respuestas.

   a) Con los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8 ¿cuántos números distintos de tres cifras, es decir entre 100 y 999, podemos formar?
   b) En una clase de 13 estudiantes se quiere un grupo de 4 estudiantes para realizar un trabajo, ¿cuántos grupos distintos se pueden hacer?
   c) ¿Cuántas palabras distintas de cuatro letras se pueden formar con las letras de la palabra "VIRTUAL" si las vocales tienen que estar en las posiciones pares y no se puede repetir ninguna letra?
   d) Se lanza una moneda que no está trucada tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos dos caras?

a)

Buscamos las variaciones con repetición de 5 dígitos (0, 2, 4, 6 y 8) tomados de 3 en 3 (números de tres 3 cifras). Esto se debe a que el orden de los elementos importa, no usamos todos los números y que los podemos repetir.

$$VR_{m,n} = m^n \rightarrow VR_{5,3} = 5^3 = \mathbf{125}$$

Solución: Hay 125 posibles números de tres cifras que podemos formar con los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8.

b)

En este caso hay que calcular las combinaciones sin repetición de 13 alumnos escogidos de 4 en 4. Esto se debe a que el orden de los elementos no importa y no podemos coger a la misma persona dos veces.

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} \rightarrow C_{13,4} = \binom{13}{4} = \frac{13!}{4! \cdot (13-4)!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{4! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{4!}$$

$$C_{13,4} = \binom{13}{4} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \mathbf{715}$$

Solución: Hay 715 formas de elegir grupos formados por 4 alumnos escogidos de entre los 13 que hay en la clase.

c)

Para realizar este apartado vamos a calcular, en primer lugar, el número de formas de colocar las vocales en las posiciones pares en una palabra formada por cuatro letras, y en segundo lugar, el número de formas de colocar las consonantes en el resto de lugares que quedan.

En ambos casos se trata de variaciones sin repetición, ya que el orden de las letras importa, no las cogemos todas para formar la palabra de cuatro letras y no se pueden repetir.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot (m-n+1) \begin{cases} Colocamos\ 2\ de\ las\ 3\ vocales\ en\ lugares\ par \rightarrow V_{3,2} \\ Colocamos\ 2\ de\ las\ 4\ vocales\ en\ otros\ lugares \rightarrow V_{4,2} \end{cases}$$

$$Vocales \rightarrow V_{3,2} = 3 \cdot (3-2+1) = 3 \cdot 2 = 6$$
$$Consonantes \rightarrow V_{4,2} = 4 \cdot (4-2+1) = 4 \cdot 3 = 12$$

Hay 6 palabras distintas de 4 letras que podemos formar con las vocales I, U, A de la palabra VIRTUAL y 12 palabras distintas de 4 letras que podemos formar con las consonantes V, R, T, L. Es decir, en total podemos formar: $Total = 6 \cdot 12 = \mathbf{72}$ palabras con las condiciones mencionadas en el enunciado.

Solución: Se pueden construir 72 palabras con las condiciones mencionadas en el enunciado.

d)

El espacio muestral del experimento del enunciado es:

$$E = \{CCC, XCC, CXC, CCX, CXX, XCX, XXC, XXX\}$$

Se trata de una experiencia dicotómica (esquema éxito-fracaso), siendo:

$$C = Sacar\ cara\ al\ lanzar\ una\ moneda \rightarrow Éxito: p = P(C) = 1/2$$
$$R = Sacar\ cruz\ al\ lanzar\ una\ moneda \rightarrow Fracaso: q = P(R) = 1/2$$

Cuando esto ocurre, la probabilidad de la variable de estudio X se distribuye siguiendo una distribución binomial: $\beta(n,p) = \left(3, \frac{1}{2}\right) \rightarrow n: nº\ de\ veces\ que\ se\ realiza\ el\ experimento$

$$X = Número\ de\ caras\ obtenidas\ al\ lanzar\ la\ moneda\ 3\ veces$$

Siendo la probabilidad de sacar al menos dos caras:

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \left[\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}\right] + \left[\binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3}\right]$$

$$P(X \geq 2) = \left[\left(\frac{3!}{2! \cdot (3-2)!}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] + \left[1 \cdot \frac{1}{8} \cdot 1\right] = \left[3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}} = \mathbf{0,5} = \mathbf{50\%}$$

Solución: La probabilidad de que salgan al menos dos caras al lanzar una moneda tres veces del 50 %

2. Los datos recogidos hasta el mes de Agosto indican que el 0,5 % de la población Española tiene o ha tenido el corona virus. Entre las personas infectadas el test modelo A da un resultado positivo en el 90 % de los casos, mientras que entre los no infectados da un resultado positivo en el 0,5 % de los casos.

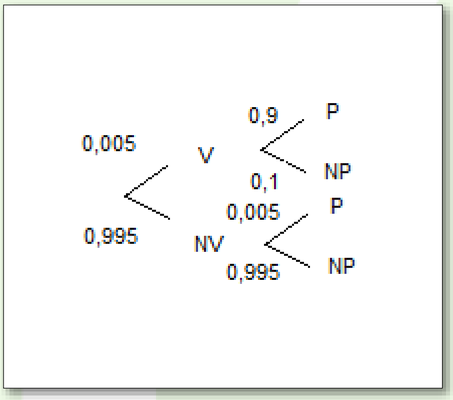
   a) Dibuja el diagrama en árbol.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogida una persona al azar, de un resultado positivo?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que ha dado negativo tenga o haya tenido el corona virus?

a)

Inicialmente definimos los sucesos:

- Suceso V: Estar infectado de corona virus.
- Suceso NV: No estar infectado de corona virus (suceso opuesto del suceso V).
- Suceso P: Dar positivo en el test de coronavirus.
- Suceso NP: No dar positivo en el test de coronavirus (suceso opuesto del suceso P).

Elaboramos un diagrama en árbol para visualizar la información aportada en el enunciado:



b)

La probabilidad de que una persona escogida al azar de positivo es:

$$P(P) = P(V) \cdot P(P/V) + P(NV) \cdot P(P/NV) = 0{,}005 \cdot 0{,}9 + 0{,}995 \cdot 0{,}005 = 9{,}47 \cdot 10^{-3} \approx \mathbf{0{,}95}\%$$

Solución: Hay un 0,95 % de probabilidades de que la persona escogida al azar en España de positivo en corona virus.

c)

Dado que sabemos que la persona escogida ha dado negativo en el test, la probabilidad de que haya tenido o tenga el coronavirus es:

$$Teorema\ de\ Bayes \rightarrow P(V/NP) = \frac{P(V \cap NP)}{P(NP)} = \frac{P(V) \cdot P(NP/V)}{P(NP)} = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}1}{0{,}99} = 5{,}05 \cdot 10^{-4} = \mathbf{0{,}05}\ \%$$

$$P(NP) = 1 - P(P) = 1 - (9{,}47 \cdot 10^{-3}) = 0{,}99$$

Solución: Hay un 0,05 % de probabilidades de que una persona que ha dado negativo en el test haya tenido o tenga el coronavirus.