Matemáticas aplicadas a las CCSS, examen de julio, curso 2018-19

OPCIÓN A

1. **Sean las matrices:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

a) **Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.**

Para comprobar los valores que hacen que la matriz no tenga inversa, es necesario igualar el determinante de dicha matriz a 0;

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 4 - 2a - 4 = 0 \rightarrow a^2 - 2a = 0 \rightarrow a(a-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Seguidamente, se indicará, mediante casos, en qué situaciones sí existirá inversa, y en cuáles no:

Caso 1: si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$
Caso 2: si $a = 0 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \nexists A^{-1}$
Caso 3: si $a = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow \nexists A^{-1}$

b) **Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa y resuélvase $A \times X = B$.**

Para resolver la ecuación matricial se recurrirá al siguiente despeje:

$$A \times X = B \rightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \rightarrow I \times X = A^{-1} \times B \rightarrow X = A^{-1} \times B$$

En primer lugar, se obtendrá A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |A| = 3 \\ A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}{3} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 5/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

2. Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$

a) Determínense en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal

Primeramente, se calcula la derivada de la función, y se iguala a cero:

$$f'(x) = 6x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt[2]{4/3}$$

A continuación, se sustituyen los puntos obtenidos en la función dada, y con ello se obtendrán las coordenadas para las que la tangente a la función es horizontal:

$$f\left(\sqrt[2]{4/3}\right) = 2\left(\sqrt[2]{4/3}\right)^3 - 8\sqrt[2]{4/3} = -6'16$$

$$f\left(-\sqrt[2]{4/3}\right) = 2\left(-\sqrt[2]{4/3}\right)^3 - 8\left(-\sqrt[2]{4/3}\right) = 6'16$$

La tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal en los puntos $(0, -6'16)$ y $(0{,}6'16)$

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$

En primer lugar, se igualará la función a 0 con el fin de averiguar en qué puntos su imagen pasa por debajo del eje x:

$$f(x) = 2x^3 - 8x = 0 \rightarrow 2x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dado que se pide la integral comprendida entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$, es necesario tomar un punto dentro del intervalo $[0{,}2]$ y obtener el signo de la imagen:

$$f(1) = 2(1)^3 - 8(1) = 2 - 8 = -6 < 0$$

La imagen es negativa, por lo que se calculará el área en valor absoluto:

$$\left|\int_0^2 (2x^3 - 8x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{2} - 4x^2\right]_0^2\right| = \left|\frac{2^4}{2} - 4(2)^2\right| = |-8| = 8\,u^2$$

El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$ tiene un valor de $8\,u^2$.

3. Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-9} \; si \; x < 3 \\ x^2 - 4 \; si \; x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.

Para determinar la continuidad de $f(x)$, se aplicará la definición de continuidad:

$$f3 = \lim_{x\to 3} f(x)$$

i) $f(3) = 3^2 - 4 = 5$

ii) $\lim_{x\to 3} f(x) \to \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = 3 \end{cases} \to \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$

Dado que los límites laterales no coinciden, la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Puesto que no se indica en qué tramo ha de comprobarse, se analizarán las asíntotas en ambos tramos de la función:

Para el tramo $f(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$

Asíntota Vertical:

$$x^2 - 9 = 0 \to x = \pm 3$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$$

La función tiene una AV en $x = -3$ La función tiene una AV en $x = 3$

Asíntota Horizontal: dado que la función es un cociente de polinomios en la que el grado del numerador es mayor que el del denominador, no tendrá AH.

Asíntota Oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \times f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(x^2-9)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3 - 9x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2-9} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x(x^2-9)}{x^2-9} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 - 9x}{x^2-9} = 0$$

$$y = -x$$

La función tiene una AO en $y = -x$.

Para el tramo $x^2 - 4$

Asíntota Vertical: la función continua en todo su dominio, por lo que no tendrá AV

Asíntota Horizontal: dado que la función es una resta de términos, la función no tendrá AH.

Asíntota Oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \times f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x} = \infty$$

Dado que el valor de m es infinito, indica que la función no tendrá AO.

4. Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio:

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?

Para comprobar si dos sucesos son dependientes o independientes, es necesario obtener la intersección de ambos sucesos por dos vías:

Primeramente, se indicará el nombre de los sucesos:

<table>
<tr><td colspan="2">Hacer ejercicio regularmente: A</td><td colspan="2">Desayunar: B</td></tr>
<tr><td>$P(A) = 2/5 = 0'4$</td><td colspan="2">$P(B) = 2/3 = 0'6$</td><td>$P(A|B) = 9/25 = 0'36$</td></tr>
</table>

1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \rightarrow P(A \cap B) = 0'4 \times 0'6 \rightarrow P(A \cap B) \cong 0'2667$

2) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) \rightarrow P(A \cap B) = 0'36 \times 0'6 = 0'24$

Una vez despejadas las intersecciones por ambos cálculos, se comparan:

$$0'2667 \neq 0'24$$

Como no coinciden, se concluye que ambos sucesos son dependientes

b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente

La probabilidad de no siempre desayunar y no hacer ejercicio regularmente se indicaría de la siguiente manera:

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0'76 = 0'24$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'4 + 0'6 - 0'24 = 0'76$$

La probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente es de un 24%.

5. Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.

$$IC(\mu)_{0\prime 95} = \left(560 \pm 1'96 \times \frac{25}{\sqrt[2]{15}}\right) = (547'35; 572'65)$$

El intervalo de confianza para la media es $(547'35; 572'65)$

NOTA: para obtener $z_{\alpha/2}$ se ha utilizado el siguiente procedimiento:

$$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$$

b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Este apartado se resuelve mediante la tipificación de la media:

$$P(\bar{x} > 565) = P(z > 1'41) = 1 - P(z < 1'41) = 1 - 0'9207 = 0'0793$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt[2]{n}}} = \frac{565 - 560}{\frac{25}{\sqrt[2]{50}}} = 1'41$$

La probabilidad del que el peso medio muestral no supere los 565 gramos es de un 7’93%.

<u>OPCIÓN B</u>

1. **Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.**

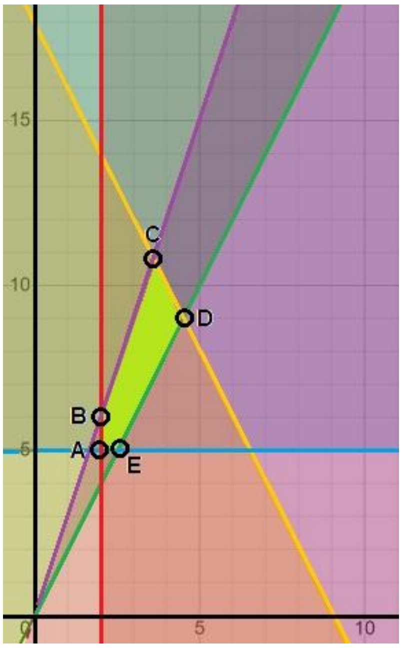
   a) **Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.**

   En primer lugar, es necesario denotar a las variables, y sobre eso establecer las relaciones que conforman la región factible:

Ancho: x	Largo: y

$$x \geq 2$$
$$y \geq 5$$
$$y \geq 2x$$
$$y \leq 3x$$
$$1000x + 500y \leq 9000 \equiv 10x + 5y \leq 90$$

Seguidamente, se representa la región factible, y se obtienen las coordenadas que la delimitan:

<table>
<tr><td rowspan="5">
</td><td>$A: \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \rightarrow \ (x, y) = (2,5)$</td></tr>
<tr><td>$B: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2x \rightarrow y = 6 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (2,6)$</td></tr>
<tr><td>$C: \begin{cases} y = 3x \rightarrow y = 10'8 \\ 10x + 5y = 90 \rightarrow 25x = 90 \rightarrow x = 3'6 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (3'6; 10'8)$</td></tr>
<tr><td>$D: \begin{cases} y = 2x \rightarrow y = 9 \\ 10x + 5y = 90 \rightarrow 20x = 90 \rightarrow x = 4'5 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (4'5; 9)$</td></tr>
<tr><td>$E: \begin{cases} y = 5 \\ y = 2x \rightarrow x = 2'5 \end{cases} \rightarrow (x, y) = (2'5; 5)$</td></tr>
</table>

b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Como se pide que tenga el mayor ancho posible, lo primero será localizar aquella combinación cuyo ancho (x) sea mayor. En este caso, se trataría del punto $D: (x, y) = (4'5; 9)$.

Teniendo esto en cuenta, el estanque tendrá unas dimensiones de 4'5 metros de largo y 9 metros de ancho.

En cuanto a su coste, dado que se indica que cada metro de ancho son 1000€, y cada metro de largo son 500€, la función de coste se plantearía de la siguiente manera:

$$C(x, y) = 1.000x + 500y$$

Y por lo tanto el coste de instalación del estanque sería:

$$c(4'5; 9) = 1.000 \times 4'5 + 500 \times 9 = 4.500 + 4.500 = 9.000€$$

El coste de instalación del estanque sería de 9.000€.

2. Se considera la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{10} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

Y la matriz $\boldsymbol{B}$ es tal que:

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{cases} |A| = -12 \\ Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -18 & -22 & 23 \\ 6 & 14 & -13 \end{pmatrix} \to \left(Adj(A^t)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ -4 & -22 & 14 \\ 2 & 23 & -13 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ -4 & -22 & 14 \\ 2 & 23 & -13 \end{pmatrix}}{-12} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1/3 & 11/6 & -7/6 \\ -1/6 & -23/12 & 13/12 \end{pmatrix}$$

b) Calcúlese B^{-1}

Para obtener el valor de B^{-1} es necesario realizar un despeje a partir de la información dada:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow (AB)^{-1} \times A = B^{-1} \times A^{-1} \times A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \times A \rightarrow$$

$$\rightarrow B^{-1} \times I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \times A \rightarrow$$

$$\rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.

Puntos de corte:

- Eje OX: $f(x) = 0 \rightarrow \boldsymbol{x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0}$

	1	1	-5	3
1		1	2	-3
	1	2	-3	$\boxed{0}$
1		1	3	
	1	3	$\boxed{0}$	
-3		-3		
	1	$\boxed{0}$		

Puntos de corte con el eje OX:

$(x, y) = (1,0)$
$(x, y) = (-3,0)$

- Eje OY: $x = 0 \rightarrow f(0) = 3 \rightarrow$ Punto de corte con el eje OY: $(x, y) = (0,3)$

Límites:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

b) Determínense los valor de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3

Se indica que la pendiente de la recta tangente debe ser 3; por tanto:

$$m = 3$$

Por otra parte, para obtener la pendiente, debe derivarse $f(x)$ e igualarla a la pendiente para obtener el valor de x:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 3 \rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)} = \frac{2 \pm 10}{6} = \begin{cases} x = -2 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Los valores de x que hacen que la pendiente de la recta tangente a la función sea igual a 3 son $x = -2$ y $x = 4/3$.

4. Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0'3$, $P(B|A) = 0'4$, $P(B|A^c) = 0'6$. Calcúlese:

a) $P(A|B)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = 0'4 \times 0'3 \rightarrow P(A \cap B) = 0'12$$

$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} \rightarrow$$

$$\rightarrow P(B) - P(A \cap B) = P(B|A^c) \times (1 - P(A)) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(B) = P(B|A^c) \times (1 - P(A)) + P(A \cap B) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(B) = 0'6 \times (1 - 0'3) + 0'12 \rightarrow P(B) = 0'54$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0'12}{0'54} = 0'2222$$

b) $P(A^c|B^c)$

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0'72}{1 - 0'54} = \frac{0'28}{0'46} = 0'6087$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'3 + 0'54 - 0'12 \rightarrow P(A \cup B) = 0'72$$

5. Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0'22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99%, el margen de error en la estimación no supera el 4%.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \times \sqrt{pq}}{E}\right)^2 \rightarrow n = \left(\frac{2'575 \times \sqrt{0'22 \times 0'78}}{0'04}\right)^2 \cong 711'1$$

$$n = 712$$

El tamaño mínimo necesario debería ser de 712 trabajadores.

$$q = 1 - p \rightarrow q = 1 - 0'22 \rightarrow q = 0'78$$

NOTA: para obtener $z_{\alpha/2}$ se ha utilizado el siguiente procedimiento:

$$1 - \alpha = 0'99 \rightarrow \alpha = 0'01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2'575$$

b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

$$IC(\rho)_{1-\alpha} = \left(\rho \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$$IC(\rho)_{0'95} = \left(0'25 \pm 1'96\sqrt{\frac{0'25 \times 0'75)}{1.000}}\right) = (0'21; 0'288)$$

El intervalo de confianza para la proporción es $(0'21; 0'288)$

$$\rho = \frac{p}{n} \rightarrow \rho = \frac{250}{1.000} = 0'25 \qquad q = 1 - p \rightarrow q = 1 - 0'25 \rightarrow q = 0'75$$

NOTA: para obtener $z_{\alpha/2}$ se ha utilizado el siguiente procedimiento:

$$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$$