PREGUNTAS TIPO TEST

Conteste a un máximo de 10 cuestiones.

1. En el espacio tridimensional se considera el plano π: 3x - 2y - z = 2 y la recta

$$r : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces:

(A) El plano y la recta se cortan perpendicularmente.
(B) La recta está contenida en el plano.
(C) Ninguna de las otras dos.

2. Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2 = A$, cumple que:

(A) det (A) > 0.
(B) Si A es regular, A = I (la matriz identidad).
(C) Ninguna de las anteriores.

3. La distancia del punto (2,1,3) a la recta x=2y=3x es:

(A) Mayor que 1.
(B) Menor que 1.
(C) Ninguna de las otras dos.

4. Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas p(A)=0,6 y p(B)=0,7. Entonces:

(A) Los sucesos A y B son tales que A U B es necesariamente el espacio total.
(B) Los espacios A y B pueden ser disjuntos.
(C) Ninguna de las otras dos.

5. El límite L = $\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x)$, con n>0:

(A) Tiene un valor L < 0 independiente de n.
(B) No existe.
(C) Ninguna de las otras dos.

6. Para toda $f(x): [a, b] \to \mathbb{R}$ función continua en [a,b] y tal que f(a)f(b)>0, se cumple que:

a) Existe algún c∈(a,b) tal que f(c)=0.
b) No necesariamente existe algún c∈(a,b) tal que f(c) = 0.
c) Ninguna de las otras dos.

7. Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?
(A) 0,1 < p < 0,15.
(B) 0,15 < p < 0,2.
(C) Ninguna de las otras dos

8. Sea A la matriz real (con a, b, c arbitrarios) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

Entonces, se cumple:

(A) Si b = c, entonces rango (A)=1.
(B) Si b=0, entonces rango (A)=2.
(C) Ninguna de las anteriores.

9. La función $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(A) Es creciente en todo su dominio.
(B) Es decreciente en (-∞,0).
(C) Ninguna de las otras dos.

10. Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:

(A) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ donde t es la traspuesta.
(B) $det(A^{-1}) = -det(A)$
(C) Ninguna de las anteriores.

11. Sean las rectas r: (0,-1,1) + a(1,3,-4) y s : (1,0,0) y b(1,0,1) en el espacio:

a) Son secantes.
b) La distancia entre ellas es $\sqrt{43}/43$.
c) Ninguna de las otras dos.

12. Se tiene un bote con caramelos de colores: rojo, amarillo, verde, azul y naranja. Se sabe que la probabilidad de sacar al azar un caramelo rojo es 0,2, la de sacar uno amarillo es 0,15, uno verde 0,1 y uno azul 0,3. Si se sacan 60 caramelos de la bolsa, ¿cuántos esperaríamos que haya de color naranja (denotamos ese número por N)?

(A) 8 MENOR o IGUAL N MENOR o IGUAL 14.
(B) 13 ≤ N ≤ 18.
(C) Ninguna de las otras dos.

13. Si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

es ortogonal, entonces:

(A) λ>0.
(B) λ<0.
(C) Ninguna de las anteriores.

14. Se pregunta a 50 consumidores si les gustan los productos A y B. Hay 37 personas a las que les gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las que no les gusta ninguno de los dos. Se elige al azar una de las personas entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le guste A?

(A) 0,25 < p < 0,3.
(B) 0,2 < p < 0,25.
(C) Ninguna de las otras dos.

15. Para toda $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua en [a,b] y derivable en (a,b), se cumple que:

(A) Existe un θ en (a,b) tal que $f(b) = f'(\theta)(b-a)$.
(B) Existe un θ en (a,b) tal que $f(b) = f(a) + f'(\theta)(b-a)$.
(C) Ninguna de las otras dos.

PREGUNTAS TIPO DESARROLLO

Elija una sola opción y conteste a los problemas en hojas separadas.

Opción 1

1.

a) **Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1, π_2, con ecuaciones respectivas:**

π_1: x + 2y - z = 3

π_2: ax + (a-2)y + 2z = 4

en función del parámetro real a.

b) **Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma**

Tenemos dos planos que dependen de un parámetro a. La posición relativa entre ambos puede estudiarse de varias maneras: bien estudiando las relaciones entre los vectores normales, bien analizando el sistema de ecuaciones de ambos planos. Optaremos por la segunda: si el sistema es incompatible significa que no se intersecarán en ningún punto, mientras que si es compatible indeterminado se intersecarán en una recta. Tenemos la matriz A* dada por

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ a & a-2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & a-2 & 2 \end{pmatrix}$$

Empezamos estudiando el rango de A*. Como la submatriz $\begin{matrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}$ tiene determinante distinto de 0, el rango de A* será 2. Vamos ahora con el de a.

Consideremos la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$. Vemos que el determinante será distinto de 0 si a es distinta de -2. Por lo tanto, para $a \neq -2$, Rg(A)=2. Si sustituimos a=-2 en la matriz A, vemos que las dos filas son proporcionales. Concluimos entonces que, si a=-2, Rg(A)=1.

Con esto tenemos:

Si a=-2, Rg(A)=1, Rg(A*)=2. Como son distintos, es un SI, y no tiene solución. Por lo tanto, los planos serán paralelos.

Si a≠-2, Rg(A)=2=Rg(A*)<nº de variables. Esto nos indica que tenemos un SCI de un grado de libertad: los planos se cortan en una recta, así que son secantes.

Para el apartado b necesitamos un vector director de la recta en la que se cortan cuando a=-2. Esto se puede hacer recordando que la recta es perpendicular a los vectores normales de los planos. En nuestro caso, los vectores normales son (1,2,-1) y (a,a-2, 2). Podemos obtener un vector normal a ambos a través del producto vectorial, que nos da $v_r = (1,2,-1) \times (a, a-2,2) = (2+a, -a-2, -a-2) = (a+2)(1,-1,-1)$. Por lo tanto, el vector que buscamos será (1,-1,-1).

2. Dada la función real

$$\boldsymbol{f(x) = ln\sqrt{4-x^2}}$$

(donde ln denota el logaritmo natural o neperiano), se pide:

a) **Representar gráficamente la curva y = f(x), discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos relativos.**
b) **Determinar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función en los puntos donde corta al eje de abscisas. ¿Cuál es el ángulo que forma cada una de estas rectas tangentes con el eje de las x?**

Antes de empezar observamos que la función $\boldsymbol{f(x) = ln\sqrt{4-x^2}}$se puede escribir, usando propiedades de logaritmos, como $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}ln(4-x^2)}$.

a) Vamos a calcular las cosas de una en una. Empezamos por el dominio:

La función ln(a) está definida sólo si a>0. En nuestro caso eso exige $4-x^2>0$ o, despejando, $x \in (-2,2)$. Por tanto, Dom(f)=(-2,2).

Como la función no está definida en el infinito, no tendrá asíntotas horizontales ni oblicuas, pero eso no impide que tenga asíntotas verticales. Para buscar éstas estudiaremos los bordes del dominio, x=-2 y x=2. En particular, calcularemos los límites de la función cuando x tiene esos valores. Si hacemos esto, vemos que

$$lim_{x\to -2^+}\frac{1}{2}ln(4-x^2)=\frac{1}{2}ln(0^+)=-\infty$$

$$lim_{x\to 2^-}\tfrac{1}{2}ln(4-x^2)=\tfrac{1}{2}ln(0^+)=-\infty.$$

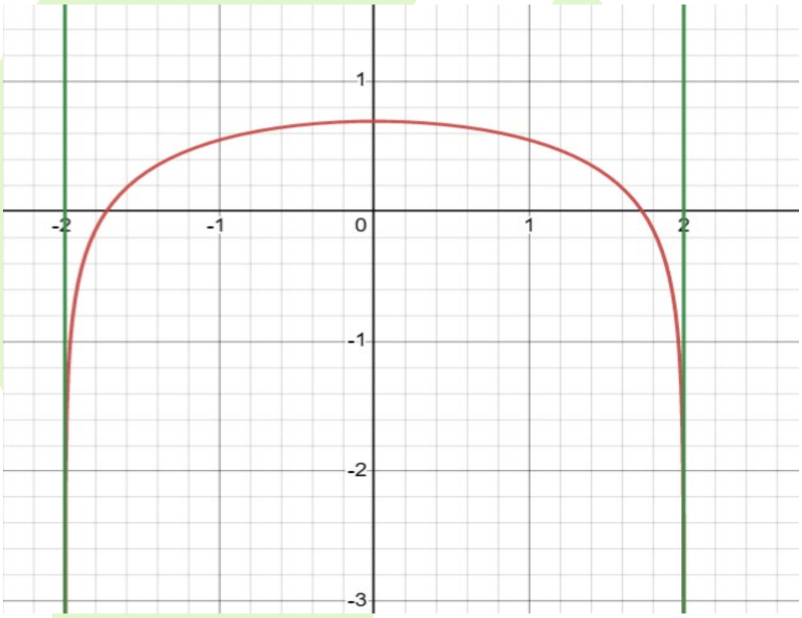
Como los límites valen (menos) infinito, la función tendrá dos asíntotas verticales, una en 2 y otra en -2.

Para estudiar el crecimiento de la función empezamos calculando su derivada. En nuestro caso, usando la regla de la cadena, tendremos

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{-2x}{4-x^2}=-\frac{x}{4-x^2}.$$

A continuación buscamos los puntos donde la derivada se anula. En este caso, f'(x)=0 sólo si x=0. Ese es el único punto crítico que tenemos. Si evaluamos la derivada en (-2,0) (por ejemplo, en x=-1) nos queda un valor positivo, así que la función crece en ese intervalo. Si ahora la evaluamos en (0,2) (por ejemplo, en x=1) nos queda negativa, así que en (0,2) la función decrece. Como la función crece a la izquierda de 0 y decrece a la derecha, en 0 tendremos un máximo: el punto (0,f(0))=(0, ln(2)).

Con esto ya tenemos todo lo que nos hace falta para dibujar la función:



b) Recordamos que la pendiente de una función en un punto x=a viene dada por la derivada en ese punto, es decir, f'(a). Aquí buscamos la pendiente en los puntos donde la función corta al eje de abscisas, que son los puntos donde f(x)=0. Vamos a empezar hallando estos puntos.

$$0=\frac{1}{2}ln(4-x^2)\to 0=ln(4-x^2)\to e^0=e^{ln(4-x^2)}\to 1=4-x^2$$

y, por tanto, será en los puntos $x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$.

La derivada ya la calculamos en el apartado anterior: era $f'(x)=\frac{-x}{4-x^2}$. Si ahora la evaluamos en los puntos donde nos interesa, tendremos $f'(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$, $f'(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$.

Si ahora queremos averiguar el ángulo, basta con recordar que la pendiente es igual a la tangente de ese ángulo, así que $\theta(\pm\sqrt{3})=arctan(\mp\sqrt{3})=\mp 1{,}047\ rad$

Opción 2

3. Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a) $\int \frac{\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2}$

Vamos a integrar esto por partes. Definimos $u=ln(x), dv=\frac{1}{(x+1)^2}dx$, con lo que tendremos $du=\frac{dx}{x}$ y $v=-\frac{1}{x+1}$. Con esto, aplicando la fórmula, tenemos

$$=-\frac{lnx}{x+1}+\int\frac{1}{x(x+1)}dx$$

La nueva integral que nos aparece es una integral racional. Podemos descomponerla en fracciones simples como $\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}=ln(x)-ln(x+1)$. Juntándolo todo,

$\int\frac{\ln(x)}{(x+1)^2}=-\frac{lnx}{x+1}+ln(x)-ln(x+1)+C$.

b) $\int\frac{\boldsymbol{xe^x}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})\hat{}\mathbf{2}}\boldsymbol{dx}$

Igual que antes, procedemos por partes. Definimos $u=xe^x$, $dv=\frac{1}{(x+1)^2}dx$. Esto nos deja

$$=-\frac{xe^x}{x+1}+\int e^x dx=-\frac{xe^x}{x+1}+e^x+C$$

4. Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real δ

	Nº Hombres	Nº mujeres	Total
Nº valoraciones positivas	**50 - δ**	**40 + δ**	90
Nº valoraciones negativas	**30 + δ**	**80 -δ**	110
Total	80	120	200

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.
b) Que sea hombre y favorable al candidato.
c) Que sea mujer o que esté a favor del candidato.
d) ¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos "ser mujer" y "no estar a favor del candidato" sean independientes?

a. Para encontrar la probabilidad de que alguien, siendo hombre, tenga una valoración positiva del candidato basta con dividir el número de hombres a favor del candidato entre el número total de hombres. En este caso tendremos $\frac{50}{80}$.

b. La probabilidad de que alguien sea un hombre y favorable al candidato será el número de hombres favorables entre el número total de participantes, es decir, $\frac{50}{200}$.

c. La probabilidad de que alguien sea una mujer o favorable al candidato será la probabilidad de que sea mujer más la de que no sea mujer pero sea favorable al candidato, es decir, P(A)∪P(B) = P(A)+P(B)-P(A∩B) = $\frac{120+90-40}{200} = \frac{170}{200}$.

d. Por último, recordamos que dos sucesos son independientes si P(A⋂B)=P(A)P(B). En este caso, P(mujer⋂contra)=$\frac{40+\delta}{200}$, P(mujer)=$\frac{120}{200}$, P(contra)=$\frac{110}{200}$. Necesitamos entonces que $\frac{80-\delta}{200} = \left(\frac{120}{200}\right) \cdot (\frac{110}{200})$. Esto se cumple si $\delta = 14$.