	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID	
	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes. ¿Cuántos intérpretes tenía la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuántos intérpretes había en total?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

a) (0.75 puntos) Halle $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$.

b) (1.75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : z = 0$.

a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto $(1, 1, 1)$.

b) (1.5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ radianes con la recta r, que esté contenida en el plano π y pase por el punto $(0, 0, 0)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La selección española competirá en la Copa Mundial Femenina de Fútbol 2023. En los dos primeros partidos de la fase de grupos, que consta de tres partidos, la probabilidad de ganar cada uno de ellos es del $80\,\%$. Sin embargo, debido al aumento en la moral de las jugadoras, si ganan los dos primeros partidos la probabilidad de ganar el tercero asciende al $90\,\%$. En caso contrario, la probabilidad de ganar el tercer partido se mantendrá en el $80\,\%$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar la probabilidad de que la selección española no gane ningún partido durante la fase de grupos.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la selección gane el tercer partido de la fase de grupos.

c) (1 punto) Si sabemos que la selección ha ganado el tercer partido, determinar la probabilidad de que no haya ganado alguno de los dos encuentros anteriores.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar si existe algún valor de m para el cual la matriz BA tiene inversa.

b) (0.75 puntos) Estudiar el rango de la matriz AB en función del parámetro m.

c) (1 punto) Para $m = 1$, discutir el sistema $(A^t\ A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$ según los valores de a.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real $f(x) = x - \dfrac{4}{(x-1)^2}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el dominio de definición de $f(x)$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función, así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.75 puntos) Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuación $9x - 8y = 6$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(0,0,1), B(1,1,0), C(1,0,-1), D(1,1,2)$, se pide:

a) (0.75 puntos) Comprobar que los puntos A, B, C y D no son coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.

b) (0.75 puntos) Hallar el área del triángulo que forman los puntos B, C y D y el ángulo $\hat{B}$ del mismo.

c) (1 punto) Hallar uno de los puntos E del plano determinado por A, B y C tales que el cuadrilátero $ABCE$ sea un paralelogramo. Hallar el área de dicho paralelogramo.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 de probabilidad 0.5 y A_2 de probabilidad 0.3 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$. De cierto suceso B de probabilidad 0.4 se sabe que es independiente de A_1 y que la probabilidad del suceso $A_3 \cap B$ es 0.1. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de A_3.

b) (1.5 puntos) Decidir si B y A_2 son independientes.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

Correcto planteamiento del problema: 1.5 puntos. (Se darán 0.5 puntos por cada ecuación bien planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 0.75 puntos. Número total de intérpretes correcto: 0.25 puntos. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

A.2.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Solución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento (incluyendo la intersección de la gráfica y la recta): 0.75 puntos. Hallar la primitiva: 0.75 puntos. Aplicar la regla de Barrow: 0.25 puntos.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 1 punto.

A.4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Aplicación correcta de la regla de Bayes: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
Observación: En la calificación del apartado c) no se penalizará que la probabilidad del suceso "ganar el tercer partido" esté mal calculada en el apartado b). En concreto, se dará como correcto el resultado obtenido al insertar en este apartado el resultado del apartado b), incluso aunque este fuese incorrecto.

B.1.

a) Cálculo correcto de BA: 0.25 puntos. Discusión correcta de la existencia de inversa: 0.5 puntos.
b) Cálculo correcto de AB: 0.25 puntos. Discusión correcta del rango: 0.5 puntos
c) Cálculo correcto de A^tA: 0.25 puntos. Discusión correcta del sistema: 0.75 puntos

B.2.

a) Dominio: 0.25 puntos. Asíntota vertical: 0.25 puntos. Asíntota oblicua: 0.25 puntos.
b) Extremos: 0.5 puntos. Monotonía: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos (0.25 por la pendiente y 0.25 por el punto de tangencia). Ecuación de la recta tangente: 0.25 puntos.

B.3.

a) Justificar que A, B, C y D no son coplanarios: 0.25 puntos. Hallar el volumen: 0.5 puntos.
b) Hallar el área: 0.5 puntos. Hallar el ángulo: 0.25 puntos
c) Planteamiento para hallar el punto: 0.5 puntos. Hallar uno de los posibles puntos: 0.25 puntos. Hallar el área: 0.25 puntos.

B.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.75 puntos.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

Si x es el número de miembros de la orquesta, y el de cada uno de los coros con igual número de miembros y z el del coro infantil, hay que resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcr} 10x-2y-z & = & 150 \\ x-y+z & = & -140 \\ 11x-2y-z & = & 260 \end{array}\right. .$$

La solución del sistema es $x=110$, $y=400$ y $z=150$. Por lo tanto, la orquesta tenía 110 intérpretes, cada uno de los coros no infantiles 400 y el coro infantil 150 para un total de 1068 intérpretes.

A.2.

a) Se tiene $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)^{2/3}(x+1)^{2/3}}{(x-1)^{2/3}}=2^{2/3}$.
b) Las soluciones de la ecuación $x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=x$ son $x=0$ y las soluciones de $\sqrt[3]{(x^2-1)^2}=1\Rightarrow x^2(x^2-2)=0$, que son $x=0$ y $x=\pm\sqrt{2}$. Como, en el primer cuadrante, $x\geq x\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\Leftrightarrow 1\geq(x^2-1)^2\Leftrightarrow x^2(x^2-2)\leq 0$, la recta $y=x$ está por encima de la gráfica de f si $0<x<\sqrt{2}$. Por tanto, el área pedida será:

$$\int_0^{\sqrt{2}} x-f(x)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{2}}-\left.\frac{3}{10}(x^2-1)^{\frac{5}{3}}\right|_0^{\sqrt{2}}=\frac{2}{5}.$$

A.3.

a) El vector director de la recta buscada estará dado por el producto vectorial entre el vector director de la recta r y la normal al plano π, $(1,0,0)\times(0,0,1)=(0,1,0)$, por tanto la recta es $(x,y,z)=(1,1+\lambda,1),\ \lambda\in\mathbb{R}$ y $\{x=1,z=1\}$ en su forma implícita.
b) Como está contenida en el plano π, su vector director será $(v_1,v_2,0)$. Como forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ radianes con la recta r, tenemos que $\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{|(v_1,v_2,0)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}\sqrt{1^2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|v_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{v_1^2}{v_1^2+v_2^2}\Rightarrow v_2=\pm v_1$. Por tanto las posibles rectas son $(x,y,z)=(\lambda,\pm\lambda,0)$ y en su forma implícita $\{y=\pm x,z=0\}$.

A.4.

a) Como la probabilidad de no ganar el tercer partido si no se ha ganado alguno de los dos anteriores es 0.2 se tiene

$$P(\text{no ganar ninguno de los tres partidos})=(0.2)^3=0.008.$$

b) Sea A el evento "ganar los dos primeros partidos de la fase clasificatoria" y B el evento "ganar el tercer partido de la fase clasificatoria". Tenemos $P(A)=(0.8)^2=0.64$, $P(B\,|\,A)=0.9$ y $P(B\,|\,\overline{A})=0.8$, donde $\overline{A}$ denota el evento complementario a A. En consecuencia

$$P(B)=P(B\,|\,A)P(A)+P(B\,|\,\overline{A})P(\overline{A})=0.9\cdot 0.64+0.8\cdot(1-0.64)=0.864.$$

c) Usando la regla de Bayes tenemos

$$P(\overline{A}\,|\,B)=\frac{P(B\,|\,\overline{A})P(\overline{A})}{P(B)}=\frac{0.8\cdot(1-0.64)}{0.864}=\frac{1}{3}.$$

B.1.

a) Como $|BA| = \begin{vmatrix} m & m^2+1 & 3m+1 \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix} = 0$, la matriz BA no tiene inversa para ningún valor de m.

b) Ya que $AB = \begin{pmatrix} m & m^2+m+1 \\ 0 & m^2+3 \end{pmatrix}$, la matriz AB tiene rango 1 para $m=0$ y rango 2 en el resto de casos.

c) Para $m=1$, $A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$, por lo que la matriz ampliada del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 4 & 10 & a^2 \end{pmatrix}$. Aplicando el método de Gauss se llega a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix}$. Así pues, el sistema es incompatible para todo a distinto de 0 y 1 y compatible indeterminado para $a=0$ o 1.

B.2.

a) La función f es continua en Dom$f(x)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Asíntota vertical: $x=1$ ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. Asíntota oblicua: $y=x$ ya que $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-x) = 0$. No hay asíntotas horizontales.

b) $f'(x) = 1 + \dfrac{8}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x=-1$. Como $f'(x)>0$ en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(1,+\infty) \Rightarrow f(x)$ es creciente en dichos intervalos. Como $f'(x)<0$ en el intervalo $(-1,1) \Rightarrow f(x)$ es decreciente en dicho intervalo. De todo esto se deduce que la función alcanza un máximo relativo en $x=-1$ de coordenadas $M(-1,-2)$.

c) La pendiente de la recta es $m = \dfrac{9}{8} = f'(x) = 1 + \dfrac{8}{(x-1)^3} \Rightarrow x=5$. Por tanto el punto de tangencia es $P(5, \frac{19}{4})$ y la ecuación de la recta tangente es: $y = \dfrac{9}{8}x - \dfrac{7}{8}$.

B.3.

a) $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1), \overrightarrow{AC} = (1,0,-2), \overrightarrow{AD} = (1,1,1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = -2 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ son l.i. $\Rightarrow$ A,B,C,D no son coplanarios $\Rightarrow$ Volumen$_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{6}\cdot|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]| = \dfrac{1}{6}\cdot|-2| = \dfrac{1}{3}$

b) Como $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD} = (-2,0,0) \Rightarrow$ Área$_{\text{triángulo}} = \dfrac{|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|}{2} = \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$.

En cuanto al ángulo, se tiene que $\cos\hat{B} = \dfrac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 135°$.

c) Sean $E_i=(x,y,z)$ los tres posibles puntos:
I) Si C y B no forman un lado del paralelogramo $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE_1} \Rightarrow (1,1,-1) = (x-1,y,z+1) \Rightarrow E_1 = (2,1,-2)$.
II) Si A y C no forman un lado del paralelogramo $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE_2} \Rightarrow (0,-1,-1) = (x,y,z-1) \Rightarrow E_2 = (0,-1,0)$.
III) Si A y B no forman un lado del paralelogramo $\Rightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BE_3} \Rightarrow (-1,0,2) = (x-1,y-1,z) \Rightarrow E_3 = (0,1,2)$.

Finalmente, Área$_{\text{paralelogramo}} = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = |(-2,1,-1)| = \sqrt{6}$.

B.4.

a) Como los sucesos A_1 y A_2 son incompatibles, se tiene que $p(A_3) = 1 - p(A_1\cup A_2) = 1 - p(A_1) - p(A_2) = 1 - 0.5 - 0.3 = 0.2$.

b) Como A_1, A_2 y A_3 son una partición disjunta del espacio muestral, $p(B) = p(B\cap A_1) + p(B\cap A_2) + p(B\cap A_3)$. De los datos se tiene que $p(B\cap A_2) = 0.4 - 0.4\cdot 0.5 - 0.1 = 0.1$. Por otro lado $p(B)\cdot p(A_2) = 0.4\cdot 0.3 = 0.12 \neq p(B\cap A_2) = 0.1$ por lo que B y A_2 no son independientes.

DOCUMENTO DE ORIENTACIONES PARA LA EvAU

Matemáticas II. Curso 2023/24

ESTRUCTURA DEL EXAMEN Y CONTENIDOS

El examen constará de **ocho problemas,** de entre los cuales cada estudiante deberá contestar a **cuatro cualesquiera** de su elección, teniendo la evaluación de cada uno de los cuatro problemas **la misma ponderación**.

Los problemas estarán diseñados para evaluar las competencias específicas que figuran en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato, y en el Decreto 64/2022 (BOCM de 26 de Julio) por el que se establecen para la Comunidad de Madrid la ordenación y el currículo del Bachillerato.

Se podrá pedir en los problemas la realización de tareas acerca de los contenidos correspondientes a la materia Matemáticas II, tal y como aparecen en el Decreto 64/2022. Entre los ocho problemas propuestos habrá dos problemas relativos a los contenidos de los bloques A (Números y operaciones) y D (Álgebra); dos problemas relativos a los contenidos del bloque B (Medida y Geometría); dos problemas relativos a los contenidos del bloque C (Geometría en el plano y el espacio); y dos problemas relativos a los contenidos del bloque E (Estadística). Los contenidos correspondientes al bloque F (Actitudes y aprendizaje) podrán ser evaluados de manera transversal en cualquiera de las preguntas.

La extensión y nivel de dificultad de los problemas propuestos serán similares a los de cursos anteriores.