INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

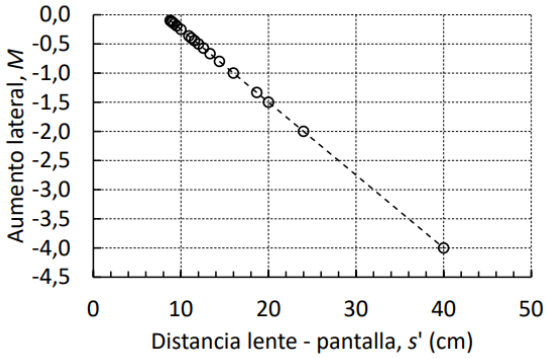
Después de leer atentamente todas las preguntas, responda a cuatro preguntas siguiendo las indicaciones dadas al inicio de cada bloque.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2,5 puntos y cada apartado se calificará según la puntuación indicada en el mismo.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque Vibraciones y Ondas (Esta pregunta no tiene opcionalidad):

Pregunta 1. Un sistema óptico está compuesto por un foco luminoso, un objeto iluminado por éste, una lente y una pantalla. Se va cambiando la distancia $\boldsymbol{s}$ entre el objeto y la lente y se busca la posición de la pantalla en la que la imagen está enfocada. La gráfica adjunta muestra la relación entre el aumento lateral $\boldsymbol{M}$ y la distancia $\boldsymbol{s'}$ entre la lente y la pantalla.



a) (1 punto) Demuestre que el aumento lateral, M, tiene la siguiente expresión en función de la distancia focal imagen, f', y de la posición de la imagen, s':
b) (0,5 puntos) Con los datos de la gráfica, determine la distancia focal de la lente, razonando si es convergente o divergente.
c) (1 punto) Determine la distancia objeto para el caso en que la distancia lente-imagen es $40\ cm$ y el aumento lateral es igual a -4. Realice el trazado de rayos en esta situación.

Bloque Campo gravitatorio (Elija una entre las preguntas 2.A. y 2.B.):

Pregunta 2.A. Consideremos el planeta extrasolar G-876d, que tiene una masa igual a $\mathbf{6}$ veces la masa de la Tierra y un radio de $\mathbf{1,73}$ veces el radio de la Tierra. El planeta describe una órbita circular de radio $\mathbf{3,14 \cdot 10^6}\ \boldsymbol{km}$ en torno a la estrella Gliese, cuya masa es de $\mathbf{6,37 \cdot 10^{29}}\ \boldsymbol{kg}$. Determine:

a) (1 punto) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.
b) (1 punto) La velocidad del planeta en la órbita y su periodo de revolución.
c) (0,5 puntos) La energía del planeta en la órbita.

Datos: Constante de la gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} kg$; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$.

Pregunta 2.B. Plutón es un planeta enano del sistema solar que describe una órbita con un periodo de $\mathbf{248}$ años terrestres. Sabiendo que la órbita de Plutón es elíptica y que la excentricidad de la órbita, es decir, el cociente entre la distancia del Sol al centro de la elipse, $\boldsymbol{c}$ y el semieje mayor de la elipse, $\boldsymbol{a}$, es $\mathbf{0,244}$, determine:

a) (1 punto) La distancia al Sol en la que Plutón está más alejado del mismo (afelio), y en la que está más cercano (perihelio).
b) (1,5 puntos) Las velocidades orbitales en el afelio y en el perihelio.

Datos: Constante de la gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$; Masa del Sol, $M_{Sol} = 1{,}99 \cdot 10^{30} kg$.

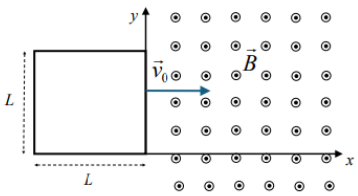
Bloque Campo electromagnético (Elija una entre las preguntas 3.A. y 3.B.)

Pregunta 3.A. Una partícula con carga $-\mathbf{2}\ \boldsymbol{nC}$ está situada en el punto $(-\mathbf{5}, \mathbf{0})\ \boldsymbol{m}$ del plano $\boldsymbol{xy}$. Otra partícula con carga $+\mathbf{2}\ \boldsymbol{nC}$ está situada en el punto $(\mathbf{5}, \mathbf{0})\ \boldsymbol{m}$ del plano $\boldsymbol{xy}$. Determine:

a) (1,5 punto) El campo y el potencial eléctrico en el punto $A(5{,}4)\ m$ del plano xy.
b) (1 punto) El trabajo que realiza la fuerza del campo eléctrico al llevar una carga $q' = 3\ nC$ desde $A(5{,}4)\ m$ hasta el punto $B(0{,}4)\ m$ del plano xy.

Datos: Constante de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$.

Pregunta 3.B. Una espira cuadrada de lado $\boldsymbol{L} = \mathbf{20}\ \boldsymbol{cm}$ está situada en el plano $\boldsymbol{xy}$ y penetra en un campo magnético uniforme $\vec{\boldsymbol{B}} = \mathbf{200}\ \boldsymbol{mT}\ \vec{\boldsymbol{k}}$ con una velocidad uniforme $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{m/s}\ \vec{\boldsymbol{\imath}}$ (ver figura). Si la espira está inicialmente completamente fuera del campo magnético y comienza a entrar en él en $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$, determine:



a) (1 punto) El flujo magnético en $t_1 = 50\ ms$ y $t_2 = 150\ ms$.
b) (1 punto) La fem inducida en $t_1 = 50\ ms$ y $t_2 = 150\ ms$.
c) (0,5 puntos) La intensidad que recorre la espira en $t = 200\ ms$ si su resistencia es de $15\ \Omega$.

Bloque Física relativista, cuántica, nuclear y de partículas (Elija una entre las preguntas 4.A. y 4.B.)

Pregunta 4.A. El isótopo de cobalto $^{60}\boldsymbol{Co}$ tiene un periodo de semidesintegración de $\mathbf{1925{,}2}$ días y una masa atómica de $\mathbf{59{,}94}\ \boldsymbol{u}$. Se prepara una muestra de este isótopo que tiene una actividad inicial de $\mathbf{2{,}64} \cdot \mathbf{10^9}\ \boldsymbol{Bq}$. Calcule:

a) (0,5 punto) La constante de desintegración del ^{60}Co.
b) (1 punto) La masa de ^{60}Co que contiene la muestra.
c) (1 punto) La actividad de la muestra al cabo de un año.

Datos: Número de Avogadro, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$.

Pregunta 4.B. Dentro del complejo de aceleradores que suministran protones al LHC (Large Hadron Collider) está el PS Booster, un acelerador circular capaz de acelerar protones hasta una energía cinética de $\mathbf{1,4\ GeV}$. Determine:

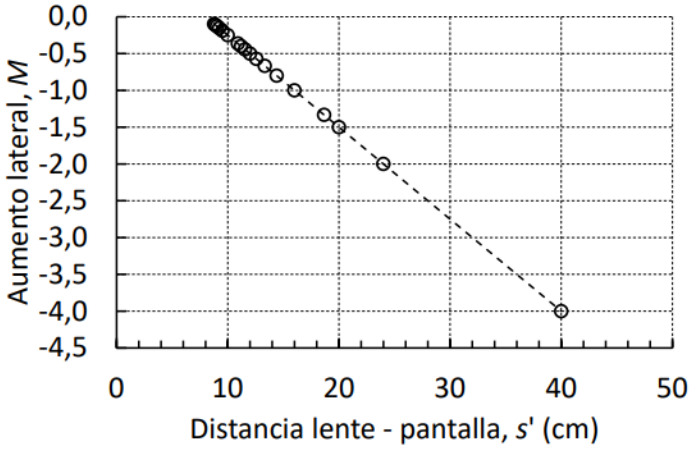
a) (1,5 punto) La masa relativista de los protones cuando su energía cinética es de $1{,}4\ GeV$.
b) (1 punto) La velocidad de dichos protones con esa energía.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^{8}\ m/s$; Masa en reposo del protón, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$.

SOLUCIONES

Bloque Vibraciones y Ondas (Esta pregunta no tiene opcionalidad):

Pregunta 1. Un sistema óptico está compuesto por un foco luminoso, un objeto iluminado por éste, una lente y una pantalla. Se va cambiando la distancia $\boldsymbol{s}$ entre el objeto y la lente y se busca la posición de la pantalla en la que la imagen está enfocada. La gráfica adjunta muestra la relación entre el aumento lateral $\boldsymbol{M}$ y la distancia $\boldsymbol{s'}$ entre la lente y la pantalla.



a) (1 punto) Demuestre que el aumento lateral, M, tiene la siguiente expresión en función de la distancia focal imagen, f', y de la posición de la imagen, s':
b) (0,5 puntos) Con los datos de la gráfica, determine la distancia focal de la lente, razonando si es convergente o divergente.
c) (1 punto) Determine la distancia objeto para el caso en que la distancia lente-imagen es $40\ cm$ y el aumento lateral es igual a -4. Realice el trazado de rayos en esta situación.

SOLUCIÓN:

a) El aumento lateral es

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}.$$

Además, se cumple la relación

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

De esta expresión, vemos que

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{f'},$$

de manera que

$$M = \frac{s'}{s} = s' \cdot \frac{1}{s} = s' \cdot \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{f'}\right) = \frac{s'}{s'} - \frac{s'}{f'} = 1 - \frac{s'}{f'}.$$

b) A partir de la expresión anterior, bastaría con conocer el aumento lateral M para una cierta posición de imagen s', es decir, basta con tomar un punto de la gráfica y calcular f' a partir de él. Los puntos que mejor se leen en la gráfica son $(s', M) = (20; -1{,}5)$ y $(s', M) = (40; -4{,}0)$. Con cualquiera de los dos puntos, y despejando en la expresión del apartado anterior para llegar a

$$M = 1 - \frac{s'}{f'}; \qquad \frac{s'}{f'} = 1 - M; \qquad f' = \frac{s'}{1 - M},$$

llegamos a $f' = \frac{40}{1+4} = \frac{20}{1+1{,}5} = 8\ cm$.

Como la distancia focal imagen es positiva, la lente es convergente.

c) Como ya usamos en el apartado a), $M = s'/s$. Por tanto, si $M = -4$ y $s' = 40\ cm$, la distancia objeto vendrá dada por

$$-4 = \frac{40}{s}; \qquad s = \frac{40}{-4}; \qquad s = -10\ cm\ (= -0{,}1\ m).$$

El trazado de rayos es el siguiente:

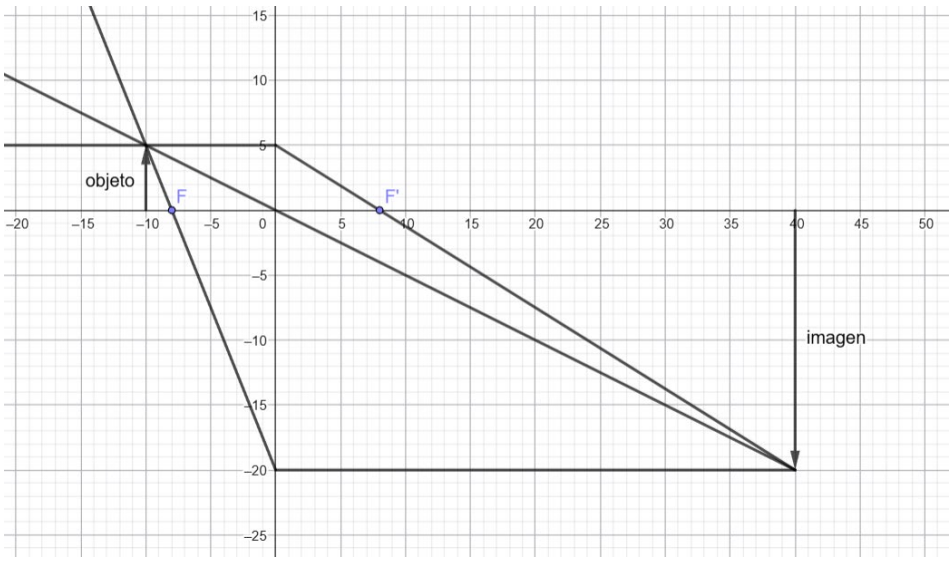


Figura 1: Trazado de rayos.

Bloque Campo gravitatorio (Elija una entre las preguntas 2.A. y 2.B.):

Pregunta 2.A. Consideremos el planeta extrasolar G-876d, que tiene una masa igual a $\mathbf{6}$ veces la masa de la Tierra y un radio de $\mathbf{1,73}$ veces el radio de la Tierra. El planeta describe una órbita circular de radio $\mathbf{3,14 \cdot 10^6}\ \boldsymbol{km}$ en torno a la estrella Gliese, cuya masa es de $\mathbf{6,37 \cdot 10^{29}}\ \boldsymbol{kg}$. Determine:

a) (1 punto) La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.
b) (1 punto) La velocidad del planeta en la órbita y su periodo de revolución.
c) (0,5 puntos) La energía del planeta en la órbita.

Datos: Constante de la gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} kg$; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$.

SOLUCIÓN:

a) La aceleración en la superficie del planeta es el módulo del campo gravitatorio en la superficie, es decir,

$$g = |\vec{g}| = \frac{GM_p}{R_p^2},$$

donde llamamos M_p a la masa del planeta y R_p a su radio. El enunciado nos dice que $M_p = 6 \cdot M_T$ y $R_p = 1{,}73 \cdot R_T$, así que

$$g = \frac{6 \cdot GM_T}{1{,}73^2 \cdot R_T^2} = \frac{6(6{,}67 \cdot 10^{-11})(5{,}97 \cdot 10^{24})}{1{,}73^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2} = 19{,}67 \frac{m}{s^2};$$

$$\boxed{g = 19{,}7 \frac{m}{s^2}.}$$

b) Dado que el planeta sigue una órbita circular, la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta, de manera que

$$\vec{F}_g = \vec{F}_c; \quad |\vec{F}_g| = |\vec{F}_c|.$$

Llamando M_G a la masa de la estrella, R al radio de la órbita y v a la velocidad orbital del planeta, llegamos a

$$|\vec{F}_g| = |\vec{F}_c|; \quad \frac{GM_G M_p}{R} = M_p \cdot \frac{v^2}{R}; \quad v^2 = \frac{GM_G}{R};$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_G}{R}} = \sqrt{\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11})(6{,}37 \cdot 10^{29})}{3{,}14 \cdot 10^9}} = 1{,}16 \cdot 10^5 \frac{m}{s}.$$

Sabiendo la velocidad a la que viaja el satélite, como $v = D/T$ (velocidad es espacio recorrido dividido por el tiempo tardado en recorrerlo, si la velocidad es constante), y como

el periodo es el tiempo que el planeta tarda en trazar una órbita completa de longitud $D = 2\pi R$,

$$T = \frac{D}{v} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(3{,}14 \cdot 10^9)}{1{,}16 \cdot 10^5};$$

$$\boxed{T = 1{,}70 \cdot 10^5\ s}\ (\simeq 1{,}96 \text{ días terrestres}).$$

c) La energía del planeta es su energía mecánica:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} M_p v^2 - \frac{G M_G M_p}{R}.$$

Podríamos hacer el cálculo con los datos que tenemos, o podemos fijarnos en que, como $v^2 = GM_G/R$,

$$E_M = \frac{1}{2} M_p \frac{GM_G}{R} - \frac{GM_G M_p}{R} = -\frac{GM_G M_p}{2R} = -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11})(6{,}37 \cdot 10^{29})6(5{,}97 \cdot 10^{24})}{2(3{,}14 \cdot 10^9)};$$

$$\boxed{E_M = -2{,}43 \cdot 10^{35}\ J.}$$

Pregunta 2.B. Plutón es un planeta enano del sistema solar que describe una órbita con un periodo de $\mathbf{248}$ años terrestres. Sabiendo que la órbita de Plutón es elíptica y que la excentricidad de la órbita, es decir, el cociente entre la distancia del Sol al centro de la elipse, $\boldsymbol{c}$ y el semieje mayor de la elipse, $\boldsymbol{a}$, es $\mathbf{0,244}$, determine:

a) (1 punto) La distancia al Sol en la que Plutón está más alejado del mismo (afelio), y en la que está más cercano (perihelio).
b) (1,5 puntos) Las velocidades orbitales en el afelio y en el perihelio.

Datos: Constante de la gravitación universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$; Masa del Sol, $M_{Sol} = 1{,}99 \cdot 10^{30} kg$.

SOLUCIÓN:

a) A partir de la tercera ley de Kepler aplicada a órbitas elípticas, tenemos una relación entre el periodo orbital y el semieje mayor de la órbita:

$$a^3 = \frac{GM_{Sol}}{4\pi^2} T^2; \quad a = \sqrt[3]{\frac{GM_{Sol}}{4\pi^2} T^2} = \sqrt[3]{\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11})(1{,}99 \cdot 10^{30})}{4\pi^2}(248 \cdot 365 \cdot 86400)^2};$$

$$a = 5{,}90 \cdot 10^{12}\ m,$$

donde es importante darse cuenta de que el periodo orbital lo debemos meter en la fórmula en segundos (unidades del sistema internacional), donde $1\ año \simeq 365\ días$ y $1\ día = 86400\ s$.

Como la excentricidad es el cociente entre la distancia focal c y el semieje mayor a, a partir del semieje mayor podemos calcular la distancia focal:

$$0{,}244 = \frac{c}{a}; \quad c = 0{,}244 \cdot a \simeq 1{,}44 \cdot 10^{12}\ m.$$

A partir de la geometría de la elipse, la distancia del Sol al perihelio es $a - c$, y la distancia al afelio es $a + c$. Conocidos el semieje mayor y la distancia focal, podemos calcular

$$\boxed{r_p = a - c = 4{,}46 \cdot 10^{12}\ m}; \qquad \boxed{r_a = a + c = 7{,}34 \cdot 10^{12}\ m.}$$

b) A lo largo de toda la trayectoria, la energía mecánica se conserva, de manera que

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} M_p v^2 - \frac{G M_{Sol} M_p}{d}$$

es constante a lo largo de toda la trayectoria, donde estamos llamando M_p a la masa de Plutón, v a su velocidad y d a su distancia al Sol. En particular, a partir de ser igual la energía mecánica en el afelio y en el perihelio, tenemos

$$\frac{1}{2} M_p v_p^2 - \frac{G M_{Sol} M_p}{r_p} = \frac{1}{2} M_p v_a^2 - \frac{G M_{Sol} M_p}{r_a};$$

$$v_p^2 - \frac{2 G M_{Sol}}{r_p} = v_a^2 - \frac{2 G M_{Sol}}{r_a}.$$

De la misma manera, como el momento angular también se conserva (y, por tanto, también su módulo, $|\vec{L}| = d \cdot v \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$), las velocidades y las distancias en afelio y perihelio están relacionadas también mediante

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a.$$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (todos los valores son conocidos excepto las velocidades). Para resolverlo, podríamos llegar a la solución general, en términos de las masas, la constante y las distancias, pero será más cómodo si vamos haciendo los cálculos intermedios. Así, sustituyendo los datos, las ecuaciones quedan

$$v_p^2 - \frac{2{,}65 \cdot 10^{20}}{4{,}46 \cdot 10^{12}} = v_a^2 - \frac{2{,}65 \cdot 10^{20}}{7{,}34 \cdot 10^{12}}; \qquad v_p^2 - 5{,}95 \cdot 10^7 = v_a^2 - 3{,}62 \cdot 10^7,$$

$$4{,}46 \cdot 10^{12} \cdot v_p = 7{,}34 \cdot 10^{12} \cdot v_a.$$

Despejando de la segunda ecuación, podemos escribir $v_p = \frac{7{,}34 \cdot 10^{12}}{4{,}46 \cdot 10^{12}} v_a = 1{,}65 v_a$. Así, introduciendo esto en la primera ecuación:

$$(1{,}65 v_a)^2 - 5{,}95 \cdot 10^7 = v_a^2 - 3{,}62 \cdot 10^7; \quad 2{,}71 v_a^2 - 5{,}95 \cdot 10^7 = v_a^2 - 3{,}62 \cdot 10^7;$$

$$2{,}71 v_a^2 - v_a^2 = 5{,}95 \cdot 10^7 - 3{,}62 \cdot 10^7; \quad 1{,}71 v_a^2 = 2{,}33 \cdot 10^7;$$

$$v_a^2 = 1{,}36 \cdot 10^7; \quad \boxed{v_a = 3{,}69 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.}$$

Por tanto, como la velocidad en el perihelio es $v_p = 1{,}65 v_a$, será

$$\boxed{v_p = 6{,}09 \cdot 10^3 \frac{m}{s}.}$$

Bloque Campo electromagnético (Elija una entre las preguntas 3.A. y 3.B.)

Pregunta 3.A. Una partícula con carga $-\mathbf{2}\ \boldsymbol{nC}$ está situada en el punto $(-\mathbf{5}, \mathbf{0})\ \boldsymbol{m}$ del plano $\boldsymbol{xy}$. Otra partícula con carga $+\mathbf{2}\ \boldsymbol{nC}$ está situada en el punto $(\mathbf{5}, \mathbf{0})\ \boldsymbol{m}$ del plano $\boldsymbol{xy}$. Determine:

a) (1,5 punto) El campo y el potencial eléctrico en el punto $A(5{,}4)\ m$ del plano xy.
b) (1 punto) El trabajo que realiza la fuerza del campo eléctrico al llevar una carga $q' = 3\ nC$ desde $A(5{,}4)\ m$ hasta el punto $B(0{,}4)\ m$ del plano xy.

Datos: Constante de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$.

SOLUCIÓN:

a) El sistema se representa en la Figura 2, donde llamamos q_1 y q_2 a las cargas de -2 nC y $+2$ nC, respectivamente, y llamamos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ a los campos que generan (indicando su dirección y sentido, pero donde el módulo no es el correcto, sólo es orientativo):

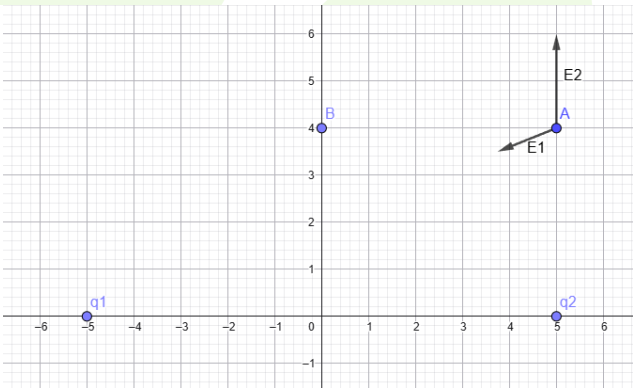


Figura 2: Sistema del ejercicio 3.

Calculando los módulos de cada uno de los campos:

$$|\vec{E}_1| = \frac{k \cdot |q_1|}{d_{q_1,A}^2} = \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot (2 \cdot 10^{-9})}{\left(\sqrt{4^2 + 10^2}\right)^2} = \frac{18}{116}\frac{N}{C} = \frac{9}{58}\frac{N}{C};$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{k \cdot |q_2|}{d_{q_2,A}^2} = \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot (2 \cdot 10^{-9})}{\left(\sqrt{4^2}\right)^2} = \frac{18}{16}\frac{N}{C} = \frac{9}{8}\frac{N}{C}.$$

Conociendo la geometría del problema, podemos descomponer los vectores del campo eléctrico en sus componentes x e y (teniendo en cuenta que el campo que genera la carga negativa apunta hacia la carga, y el que genera la carga positiva apunta hacia fuera de la carga):

$$E_{1,x} = -|\vec{E}_1| \cdot \frac{10}{\sqrt{4^2+10^2}} = -0{,}144\,\frac{N}{C}; \qquad E_{1,y} = -|\vec{E}_1| \cdot \frac{4}{\sqrt{4^2+10^2}} = -0{,}058\,\frac{N}{C}.$$

$$E_{2,x} = 0; \qquad E_{2,y} = |\vec{E}_2| = \frac{9}{8}\frac{N}{C}.$$

En el resultado numérico de $E_{1,y}$ escribimos sólo dos cifras significativas porque, como el objetivo es calcular el campo eléctrico total, sabemos que los demás decimales no van a aparecer en el resultado final. Entonces, como el resto de decimales no serán importantes, elegimos tomar sólo dos cifras significativas para que haya tantos decimales en $E_{1,x}$ como en $E_{1,y}$.

Finalmente, dado que las expresiones vectoriales de los campos serán

$$\vec{E}_1 = (-0{,}144\,\vec{\imath} - 0{,}058\,\vec{\jmath})\frac{N}{C} \quad y \quad \vec{E}_2 = \frac{9}{8}\,\vec{\jmath}\frac{N}{C},$$

el campo total será la suma de ambos campos (principio de superposición):

$$\boxed{\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (-0{,}144\,\vec{\imath} + 1{,}07\,\vec{\jmath})\frac{N}{C}.}$$

Para calcular el potencial, el cálculo es más sencillo por ser una cantidad escalar. Por el principio de superposición, el potencial total será la suma de los potenciales generados por cada una de las cargas:

$$V_1 + V_2 = \frac{k \cdot q_1}{d_{q_1,A}} + \frac{k \cdot q_2}{d_{q_2,A}} = \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot (-2 \cdot 10^{-9})}{\sqrt{4^2+10^2}} + \frac{(9 \cdot 10^9) \cdot (2 \cdot 10^{-9})}{4} = \frac{-18}{\sqrt{116}} + \frac{18}{4};$$

$$\boxed{V_A = 2{,}83\,V.}$$

b) El trabajo que realiza la fuerza es $W = -\Delta E_p = -q'\Delta V$ (como ya tenemos calculado el potencial en A, será más cómodo calcular ΔV y después multiplicar por q'). De la misma manera que en el apartado anterior, calculamos el potencial en B mediante

$$V_B = V_1 + V_2 = \frac{k \cdot q_1}{d_{q_1,B}} + \frac{k \cdot q_2}{d_{q_2,B}} = \frac{-18}{\sqrt{5^2+4^2}} + \frac{18}{\sqrt{5^2+4^2}} = 0\,V.$$

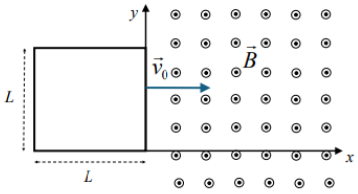
Entonces,

$$W = -q' \cdot (V_B - V_A) = -(3 \cdot 10^{-9}) \cdot (0 - 2{,}83\,V);$$

$$\boxed{W = 8{,}49 \cdot 10^{-9}\,J.}$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Pregunta 3.B. Una espira cuadrada de lado $\boldsymbol{L = 20\ cm}$ está situada en el plano $\boldsymbol{xy}$ y penetra en un campo magnético uniforme $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{200\ mT\ \vec{k}}$ con una velocidad uniforme $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{2\ m/s\ \vec{\imath}}$ (ver figura). Si la espira está inicialmente completamente fuera del campo magnético y comienza a entrar en él en $\boldsymbol{t = 0}$, determine:



a) (1 punto) El flujo magnético en $t_1 = 50\ ms$ y $t_2 = 150\ ms$.
b) (1 punto) La fem inducida en $t_1 = 50\ ms$ y $t_2 = 150\ ms$.
c) (0,5 puntos) La intensidad que recorre la espira en $t = 200\ ms$ si su resistencia es de $15\ \Omega$.

SOLUCIÓN:

a) En general, el flujo magnético viene dado por

$$\Phi_m = B \cdot S \cdot \cos(\alpha),$$

donde B es el módulo del campo magnético, S la superficie de la espira atravesada por el campo magnético y α es el ángulo formado por el campo $\vec{B}$ y el vector normal a la superficie de la espira (en este caso tendremos $\alpha = 0º$ y, por tanto, $\cos(\alpha) = 1$).

Cuando hayan pasado $t_1 = 50\ ms$, el lado derecho del cuadrado habrá avanzado una distancia dada por $d = v_0 \cdot t_1 = (2\ m/s) \cdot 0{,}05\ s = 0{,}1\ m = 10\ cm$. Entonces, como $d = L/2$, en $t = t_1$, habrá entrado la mitad del cuadrado en la región con campo magnético, de manera que la superficie de la espira atravesada por el campo será $S_1 = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02\ m^2$. Así, el flujo en t_1 es

$$\boxed{\Phi_{m,1} = 0{,}2 \cdot 0{,}02 = 4 \cdot 10^{-3}\ Wb.}$$

Para $t = t_2 = 150\ ms$, el lado derecho del cuadrado habrá avanzado una distancia $d = v_0 \cdot t_2 = (2\ m/s) \cdot 0{,}15\ s = 0{,}3\ m = 30\ cm$, es decir, ya habrá entrado toda la espira en la región con campo magnético. De esta forma, la superficie atravesada por el campo magnético es toda la superficie del cuadrado, $S_2 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04\ m^2$. Entonces,

$$\boxed{\Phi_{m,2} = 0{,}2 \cdot 0{,}04 = 8 \cdot 10^{-3}\ Wb.}$$

b) La fuerza electromotriz viene dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Para calcular el valor de esta derivada en los tiempos que se nos pide, conviene conocer de manera explícita la expresión del flujo magnético. Como la espira empieza a entrar en la región con campo en $t = 0$, para $t < 0$ tendremos que el flujo es nulo. A partir de $t = 0$, la espira irá entrando a la región con campo magnético a velocidad constante. Así, la superficie atravesada por el campo será $S(t) = L_1(t) \cdot L_2$, donde llamamos L_2 a la altura del cuadrado (la longitud de uno de los lados, $L_2 = L = 0{,}2\ m$) y L_1 a la longitud de la base del cuadrado que ha entrado en la región con campo y L_2 es la altura del cuadrado (la longitud del lado). Como el extremo derecho de los lados horizontales del cuadrado se mueve siguiendo $x(t) =$

$v_0 \cdot t$, la parte de la base del cuadrado que ha entrado en la región con campo (es decir, L_1) será también $v_0 \cdot t$ hasta que termine de entrar todo el cuadrado. Después, cuando todo el cuadrado esté en la región del campo, tendremos que L_1 es todo el lado del cuadrado.

En resumen, tendremos $L_1(t) = v_0 \cdot t$ hasta que todo el cuadrado entre en $x > 0$, y a partir de ese momento, $L_1(t) = L = 0{,}2\ m$. El cuadrado habrá terminado de entrar en $x > 0$ cuando el extremo derecho del lado horizontal esté en $x(t) = L$, es decir, cuando sea $v_0 \cdot t = L$; $t = L/v_0 = 0{,}2/2 = 0{,}1\ s$. Por tanto, como el flujo es $\Phi_m(t) = B \cdot S(t) = B \cdot L_1(t) \cdot L_2$, este vendrá dado por

$$\Phi_m(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ 0{,}08 \cdot t & si\ 0 < t \leq 0{,}1s \\ 0{,}008 & si\ 0{,}1s < t \end{cases}$$

Notemos que podríamos haber calculado esta expresión general en el apartado anterior para calcular los flujos en t_1 y t_2. Podemos comprobar que esta expresión reproduce los cálculos anteriores: $\Phi_m(t_1) = \Phi_m(0{,}05) = 0{,}08 \cdot 0{,}05 = 0{,}004$; $\Phi_m(t_2) = \Phi_m(0{,}15) = 0{,}008$.

De esta forma, derivando el flujo magnético obtenemos una expresión para la fuerza electromotriz inducida como función del tiempo:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ -0{,}08 & si\ 0 < t < 0{,}1s \\ 0 & si\ 0{,}1s < t \end{cases}$$

Así,

$$\boxed{\varepsilon(t_1) = \varepsilon(0{,}05) = -0{,}08\ V} \quad \text{y} \quad \boxed{\varepsilon(t_2) = \varepsilon(0{,}15) = 0\ V.}$$

c) Para $t = 200\ ms = 0{,}2\ s$, $\varepsilon(t) = \varepsilon(0{,}2) = 0\ V$, de manera que no se induce corriente:

$$\boxed{I = 0\ A.}$$

De manera más concreta, como $\varepsilon = I \cdot R$, $I = \varepsilon/R = 0/15 = 0\ A$.

Pregunta 4.A. El isótopo de cobalto $^{60}\boldsymbol{Co}$ tiene un periodo de semidesintegración de $\mathbf{1925{,}2}$ días y una masa atómica de $\mathbf{59{,}94\ u}$. Se prepara una muestra de este isótopo que tiene una actividad inicial de $\mathbf{2{,}64 \cdot 10^9\ Bq}$. Calcule:

a) (0,5 punto) La constante de desintegración del ^{60}Co.
b) (1 punto) La masa de ^{60}Co que contiene la muestra.
c) (1 punto) La actividad de la muestra al cabo de un año.

Datos: Número de Avogadro, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$.

SOLUCIÓN:

a) Como la constante de desintegración y el tiempo de semivida se relacionan mediante $T_{1/2} \cdot \lambda = \ln(2)$, será $\lambda = \ln(2)/T_{1/2}$. El tiempo de semidesintegración son 1925,2 días, que es igual a $T_{1/2} = 1925{,}2 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s \simeq 1{,}66 \cdot 10^8\ s$. Entonces:

$$\boxed{\lambda = 4{,}17 \cdot 10^{-9}\ s^{-1}.}$$

b) La actividad y el número de átomos se relacionan a través de $A(t) = \lambda \cdot N(t)$. En concreto, para $t = 0$, la actividad inicial se relaciona de la misma manera con el número de átomos inicial: $A_0 = \lambda \cdot N_0$, de manera que $N_0 = A_0/\lambda$. De esta manera podemos calcular el número inicial de isótopos que contiene la muestra:

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{2{,}64 \cdot 10^9}{4{,}17 \cdot 10^{-9}} = 6{,}34 \cdot 10^{17}\ átomos.$$

Sabiendo el número inicial de isótopos y la masa atómica del ^{60}Co, podemos calcular la masa inicial a través del número de Avogadro:

$$m_0 = 6{,}34 \cdot 10^{17}\ átomos \cdot \frac{1\ mol}{6{,}02 \cdot 10^{23}\ átomos} \cdot \frac{59{,}94\ g}{1\ mol} \cdot \frac{1\ kg}{1000\ g};$$

$$\boxed{m_0 = 6{,}31 \cdot 10^{-8}\ kg} = 6{,}31 \cdot 10^{-5}\ g = 63{,}1\ \mu g.$$

c) La actividad como función del tiempo viene dada por $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. Como $t = 1\ año = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ s = 3{,}15 \cdot 10^7\ s$,

$$A(1\ año) = A(3{,}15 \cdot 10^7\ s) = 2{,}64 \cdot 10^9 \cdot e^{-(4{,}17 \cdot 10^{-9}) \cdot (3{,}15 \cdot 10^7)};$$

$$\boxed{A(1\ año) = 2{,}32 \cdot 10^9\ Bq.}$$

Pregunta 4.B. Dentro del complejo de aceleradores que suministran protones al LHC (Large Hadron Collider) está el PS Booster, un acelerador circular capaz de acelerar protones hasta una energía cinética de $\mathbf{1{,}4\ GeV}$. Determine:

a) (1,5 punto) La masa relativista de los protones cuando su energía cinética es de $1{,}4\ GeV$.
b) (1 punto) La velocidad de dichos protones con esa energía.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$; Masa en reposo del protón, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg$.

SOLUCIÓN:

a) Como $1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J$, $1\ GeV = 10^9\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-10}\ J$, de manera que la energía cinética de los protones es $1{,}4\ GeV = 2{,}24 \cdot 10^{-10}\ J$. Además, la energía de los protones será igual a la suma de su energía en reposo y su energía cinética: $E = E_0 + E_c$. Por otro lado, la energía también será igual al producto de su masa relativista y c^2. Matemáticamente:

$$m \cdot c^2 = E = E_0 + E_c = m_0 \cdot c^2 + E_c.$$

Dividiendo toda esta expresión por c^2, podemos calcular la masa relativista:

$$m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + E_c; \quad m = m_0 + \frac{E_c}{c^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-27} + \frac{2{,}24 \cdot 10^{-10}}{(3 \cdot 10^8)^2};$$

$$\boxed{m = 4{,}16 \cdot 10^{-27}\ kg.}$$

b) Podríamos calcular la velocidad despejándola de $E_c = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$ o, de manera equivalente, a través de $m = \gamma \cdot m_0$. Como en el apartado anterior calculábamos m, puede resultar más cómodo despejar en esta segunda ecuación. Como $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$m = \gamma \cdot m_0; \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{m_0}{m}; \quad \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2; \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m_0}{m}\right)^2;$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2; \quad v^2 = \left(1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right) \cdot c^2; \quad v = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} \cdot c.$$

Finalmente, sustituyendo los datos,

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}}{4{,}16 \cdot 10^{-27}}\right)^2} \cdot (3 \cdot 10^8) = (0{,}916) \cdot (3 \cdot 10^8),$$

$$\boxed{v = 2{,}75 \cdot 10^8 \frac{m}{s}.}$$