INSTRUCCIONES GENERALES

- **Material permitido**: CALCULADORA NO PROGRAMABLE y sin capacidad de almacenar archivos.
- **Vectores y decimales**:
  - Vectores: se deben escribir con una flecha en la parte superior, $\vec{v}$.
  - Decimales: en los enunciados se utiliza la coma como separador de decimales, en las respuestas se admiten tanto el punto como la coma como separador de decimales.

Bloque 1: Interacción electromagnética (2,5 puntos)

(Resuelva sólo uno de los problemas: 1a o 1b)

Problema 1a.

Dos cables conductores rectilíneos, paralelos e indefinidos están orientados paralelos al eje z. El primero de ellos pasa por el punto $(0,0,0)\ cm$, y el segundo pasa por el punto $(12,0,0)\ cm$. Por el primer conductor circula una corriente $I_1 = 5\ A$ en el sentido positivo del eje z, mientras que por el segundo circula una corriente $I_2 = 2 \cdot I_1$ en el sentido negativo del eje z. Responde razonadamente:

a) Considera la división del plano xz en las siguientes regiones:
   - Región 1: $x < 0$.
   - Región 2: $0 < x < 12\ cm$.
   - Región 3: $12\ cm < x$.

   Para cada una de estas regiones, indica el sentido de los campos magnéticos generados por cada cable.

b) Encuentra los puntos del espacio en los que el campo magnético total es nulo.

c) Una carga q se encuentra inicialmente en el punto $(6,0,0)\ cm$, y se desplaza con una velocidad $\vec{v} = (0,0,v_0)$. Calcula la fuerza magnética total sobre la carga.

Datos: Permeabilidad magnética en el vacío: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/A^2$.

Problema 1b.

Se acelera un ion Cl^- hasta una velocidad de $\vec{v} = 1{,}5 \cdot 10^5\ \vec{j}\ m/s$. Este ion viaja libremente hasta que penetre en una región con campo magnético uniforme $\vec{B} = -1{,}2\ \vec{k}\ T$. Tras esto, el ion describe una trayectoria circular de radio $R = 4{,}6\ cm$.

a) Indica el sentido de giro del ion.

b) Calcula la masa del Cl^-.

c) Determina el campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) que habría que aplicar en esta región para que el Cl^- siguiera viajando sin desviarse.

Datos: Constante de Coulomb: $k = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$. Valor absoluto de la carga del electrón: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$.

Bloque 2: Física del siglo XX (2,5 puntos)

(Resuelva sólo uno de los problemas: 2a o 2b)

Problema 2a. El cesio tiene un trabajo de extracción de $2{,}1\ eV$, mientras que el del aluminio es $4{,}08\ eV$. Se dispone de una muestra de cada uno de estos metales, y ambas muestras son iluminadas con una luz azul con longitud de onda $450\ nm$.

a) ¿Alguna de las dos muestras emitirá electrones?
b) En caso de que la respuesta del apartado anterior sea afirmativa para alguna muestra o ambas, calcula su/sus potencial/es de frenado.
c) Suponiendo que la velocidad de los electrones emitidos es mucho menor que c, calcula la velocidad máxima de los fotones emitidos.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón: $e = |q_e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$. Masa del electrón: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$. Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$. Constante de Planck: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$.

Problema 2b. En 1945 se crearon y detonaron las primeras bombas atómicas. Una de ellas, apodada *Fat Man*, contenía $6{,}2\ kg$ de plutonio-239, que tiene un periodo de semidesintegración de 24.200 años ($24{,}2 \cdot 10^3$ años). Si no se hubiera detonado esta bomba, calcula:

a) ¿Qué masa de plutonio-239 quedaría en la actualidad (año 2026)?
b) ¿Cuánto tiempo tendría que pasar hasta que queden $500\ g$?
c) El plutonio se produce mediante el proceso ${}^{239}_{93}Np \rightarrow {}^{239}_{94}Pu$. ¿Qué tipo de partícula se emite en este proceso?

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón: $e = |q_e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$. Masa del electrón: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$. Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$. Constante de Planck: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$.

Bloque 3: Ondas y óptica (2,5 puntos)

(Responda sólo a **5 de las 8 cuestiones**)

1. La nota “la 4” es una onda sonora con una frecuencia de $440\ Hz$. Si la velocidad del sonido en el aire es $340\ m/s$, ¿cuál es la longitud de onda del “la 4”?
   a) $1{,}86\ m$.
   b) $1{,}29\ m$.
   c) $0{,}77\ m$.
2. Un altavoz emite una onda sonora esférica. A $10\ m$ de la fuente, la intensidad de la onda es de $20\ W/m^2$. ¿A qué distancia del altavoz habría que situarse para que la intensidad de la onda sea $5\ W/m^2$?
   a) $40\ m$.
   b) $20\ m$.
   c) $15\ m$.
3. La velocidad de la luz en el vacío es $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$. Sabiendo que el vidrio tiene un índice de refracción $n = 1{,}5$, ¿cuál es la velocidad de la luz en el vidrio?
   a) $2 \cdot 10^8\ m/s$.
   b) $3 \cdot 10^8\ m/s$.
   c) $4{,}5 \cdot 10^8\ m/s$.
4. El índice de refracción del vidrio es $n = 1{,}5$ y el del aire es $n = 1$. ¿Cuál es el ángulo de reflexión interna total (ángulo a partir del cual se refleja toda la luz que incide desde el vidrio en la frontera entre los dos medios)?
   a) $41{,}81º$.
   b) $59{,}24º$.
   c) $48{,}59º$.

5. Un haz de luz monocromática índice desde el agua ($n_{agua} = 1{,}33$) en un material transparente con índice de refracción $n = 1{,}75$. Si el ángulo de incidencia es $45º$, ¿cuál es el ángulo de refracción?
   a) $18{,}45º$.
   b) $32{,}51º$.
   c) $25{,}83º$.
6. Se coloca un objeto frente a una lente delgada convergente. En relación a la imagen generada se puede afirmar:
   a) Siempre se genera una imagen real.
   b) No siempre se genera imagen, y si se genera puede ser real o virtual.
   c) No siempre se genera imagen, pero si se genera siempre es real.
7. Se colocan cuatro masas iguales, de magnitud M, en los puntos $(0{,}0)$, $(2{,}0)$, $(0{,}4)$, $(2{,}4)$. En estas condiciones se quiere lleva una masa m desde el punto $(1{,}1)$ hasta el punto $(5{,}5)$, y se consideran dos caminos:
   - Camino A: Se lleva la masa m de $(1{,}1)$ a $(1{,}5)$ paralela al eje y, y después se lleva de $(1{,}5)$ a $(5{,}5)$ paralela al eje x.
   - Camino B: Se lleva la masa m de $(1{,}1)$ a $(5{,}1)$ paralela al eje x, y después se lleva de $(5{,}1)$ a $(5{,}5)$ paralela al eje y.

   a) El trabajo realizado al llevar la masa por el camino A es menor que el trabajo al llevarla por el camino B.
   b) El trabajo realizado al llevar la masa por el camino A es mayor que el trabajo al llevarla por el camino B.
   c) El trabajo realizado es el mismo en ambos caminos.
8. Una bola de tenis tiene una masa de $57\ g$, Un tenista profesional lanza la pelota a una velocidad de $250\ km/h$. Sabiendo que la constante de Planck es $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$, ¿cuál es su longitud de onda de De Broglie?
   a) $4{,}65 \cdot 10^{-38}\ m$.
   b) $1{,}67 \cdot 10^{-34}\ m$.
   c) $4{,}65 \cdot 10^{-35}\ m$.

Bloque 4: Interacciów gravitatoria (2,5 puntos)

(En este bloque no hay optatividad: Resuelva el problema 3)

Problema 3

Una empresa quiere colocar un satélite de masa $m = 100\ kg$ en una órbita circular alrededor de la Tierra, a una altura $h = 500\ km$ sobre la superficie. 6 meses después de la puesta en órbita se hace una maniobra para cambiar el satélite a otra órbita circular, situada a una altura de $1.000\ km$ más alta que la órbita anterior.

a) Calcula la aceleración que sufre el satélite como consecuencia de la gravedad de la Tierra cuando se encuentra en la primera órbita.
b) ¿Cuánto cambia el periodo orbital al hacer el cambio de órbita?
c) ¿Cuánta energía hay que suministrar al satélite para que cambie de órbita?

Datos: Constante de la gravitación universal: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\,m^2/kg^2$, masa de la Tierra: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$, radio de la Tierra: $R_T = 6370\ km$.

SOLUCIONES

Problema 1a.

Dos cables conductores rectilíneos, paralelos e indefinidos están orientados paralelos al eje z. El primero de ellos pasa por el punto $(0,0,0)\ cm$, y el segundo pasa por el punto $(12,0,0)\ cm$. Por el primer conductor circula una corriente $I_1 = 5\ A$ en el sentido positivo del eje z, mientras que por el segundo circula una corriente $I_2 = 2 \cdot I_1$ en el sentido negativo del eje z. Responde razonadamente:

a) Considera la división del plano xz en las siguientes regiones:

- Región 1: $x < 0$.
- Región 2: $0 < x < 12\ cm$.
- Región 3: $12\ cm < x$.

Para cada una de estas regiones, indica el sentido de los campos magnéticos generados por cada cable.

b) Encuentra los puntos del espacio en los que el campo magnético total es nulo.

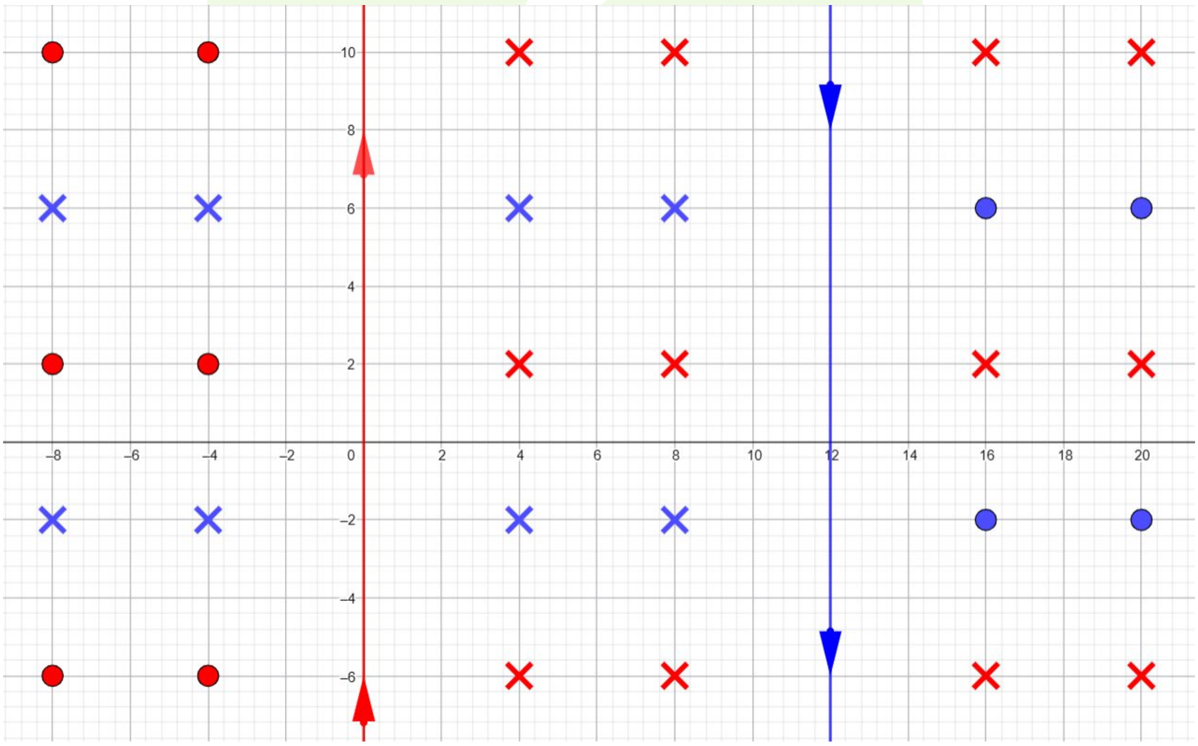
c) Una carga q se encuentra inicialmente en el punto $(6,0,0)\ cm$, y se desplaza con una velocidad $\vec{v} = (0,0,v_0)$. Calcula la fuerza magnética total sobre la carga.

Datos: Permeabilidad magnética en el vacío: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ N/A^2$.

SOLUCIÓN

a) Se incluye a continuación una representación gráfica de los conductores. El eje horizontal representa el eje x, y el vertical representa el eje z. El primer conductor aparece coloreado en color rojo, y el segundo en azul. En ambos se representa con flechas el sentido de la corriente que circula por ellos.

En cada región del plano xz se representan los campos magnéticos generados por cada conductor, con el mismo color que el del conductor que lo genera. Se emplea una cruz para indicar que el campo entra hacia el plano, y un punto si el vector sale de él.



b) Para que el campo magnético total sea nulo, debe ser $\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0}$, es decir, $\vec{B}_1 = -\vec{B}_2$. Entonces, los campos generados por cada conductor deben tener la misma dirección, pero sentidos opuestos. Los únicos puntos del espacio donde los campos tienen la misma dirección son los puntos del plano xz, así que sólo buscaremos soluciones de $\vec{B}_T = \vec{0}$ en este plano.

Separando el plano xz en las mismas regiones que en el apartado anterior, y basándonos en la imagen anterior, las únicas regiones donde puede suceder que el campo se anule son las regiones 1 y 3, ya que en la región 2 ambos campos tienen el mismo sentido. Veamos por separado si hay puntos en cada una de estas regiones hay puntos donde se anule el campo.

En cada caso llamaremos d_1a la distancia de cada punto al conductor 1 (rojo) y d_2 a la distancia al conductor 2 (azul).

Región 1: La distancia de cada punto al conductor 2 satisface $d_2 = d_1 + 0{,}12$ (distancia del punto al primer conductor más distancia entre los conductores), ya que los puntos de esta región están a la izquierda del conductor 1. Es importante tener en cuenta que $12\ cm = 0{,}12\ m$ al escribir esta expresión. Usando esto tenemos lo siguiente:

$$\vec{B}_1 = -\vec{B}_2; \quad |\vec{B}_1| = |-\vec{B}_2|; \quad |\vec{B}_1| = |\vec{B}_2|; \quad \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2}; \quad \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (d_1 + 0{,}12)};$$

$$\frac{I_1}{d_1} = \frac{I_2}{d_1 + 0{,}12}; \quad (d_1 + 0{,}12)\cdot I_1 = I_2 \cdot d_1; \quad I_1 \cdot d_1 + 0{,}12 \cdot I_1 = I_2 \cdot d_1;$$

$$0{,}12 \cdot I_1 = (I_2 - I_1)\cdot d_1; \quad d_1 = \frac{0{,}12 \cdot I_1}{I_2 - I_1}.$$

Sustituyendo los datos, al ser $I_1 = 5\ A$, $I_2 = 2 \cdot I_1 = 10\ A$, tenemos:

$$\boxed{d_1 = \frac{0{,}12 \cdot 5}{10 - 5} = 0{,}12\ m.}$$

Por tanto, en todos los puntos del plano xz que se encuentren a una distancia de $0{,}12\ m$ del conductor 1 a la izquierda (y, por tanto, a $0{,}24\ m$ del conductor 2) se anula el campo magnético. Estos son los puntos cuyas coordenadas son:

$$\boxed{(x; y; z) = (-0{,}12; 0; z), \quad z \in \mathbb{R}.}$$

Región 3: En este caso, la relación entre las distancias d_1 y d_2 es $d_1 = d_2 + 0{,}12$, por estar los puntos de esta región a la derecha del segundo conductor. Repitiendo los mismos cálculos del caso anterior, tenemos:

$$\vec{B}_1 = -\vec{B}_2; \quad |\vec{B}_1| = |-\vec{B}_2|; \quad |\vec{B}_1| = |\vec{B}_2|; \quad \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2}; \quad \frac{\mu_0 I_1}{2\pi (d_2 + 0{,}12)} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2};$$

$$\frac{I_1}{d_2 + 0{,}12} = \frac{I_2}{d_2}; \quad d_2 \cdot I_1 = (d_2 + 0{,}12)\cdot I_2; \quad d_2 \cdot I_1 = d_2 \cdot I_2 + 0{,}12 \cdot I_2;$$

$$d_2 \cdot (I_1 - I_2) = 0{,}12 \cdot I_2; \quad d_2 = \frac{0{,}12 \cdot I_2}{I_1 - I_2}.$$

Sustituyendo otra vez los datos, llegaríamos a

$$d_2 = \frac{0{,}12 \cdot 10}{5 - 10} = -0{,}24\ m.$$

Esta solución no tiene sentido, ya que buscamos puntos a la derecha del segundo conductor, es decir, con $d_2 > 0$. De hecho estamos encontrando la misma solución que ya teníamos: los puntos que se encuentran a $0{,}24\ m$ a la izquierda del conductor 2.

Por tanto, en esta región no encontramos soluciones, por lo que los únicos puntos donde se anula el campo son los que mencionamos en la sección anterior.

c) La fuerza magnética viene dada por $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$. En el punto $(6{,}0{,}0)\ cm$, el campo magnético será la suma de los campos magnéticos generados por cada uno de los conductores.

El módulo del campo magnético creado por un conductor rectilíneo infinito es $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$, donde I es la intensidad del conductor y d es la distancia del conductor al punto en el que genera el campo. Aplicándolo a los dos conductores del problema, al estar ambos a una distancia $d = 6\ cm = 0{,}06\ m$ del punto $(6{,}0{,}0)\ cm$, el módulo de cada campo es:

$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0{,}06} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-5}\ T,$$
$$|\vec{B}_2| = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}06} = \frac{10}{3} \cdot 10^{-5}\ T.$$

Recordando el esquema del apartado a), ambos campos tienen como dirección la perpendicular a la imagen, que es el eje y. Además, ambos tienen el mismo sentido, entrante en la imagen. Este sentido corresponde con el sentido positivo del eje y, de manera que los campos son

$$\vec{B}_1 = \frac{5}{3} \cdot 10^{-5}\,\vec{\jmath}\ T,$$
$$\vec{B}_2 = \frac{10}{3} \cdot 10^{-5}\,\vec{\jmath}\ T.$$

Por tanto, el campo magnético en el punto que nos interesa es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{15}{3} \cdot 10^{-5}\,\vec{\jmath}\ T = 5 \cdot 10^{-5}\,\vec{\jmath}\ T,$$

es decir, $\vec{B} = (0\,, 5 \cdot 10^{-5}\,, 0)\ T$.

Finalmente:

$$\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B} = q\,(0{,}0{,}v_0) \times (0\,, 5 \cdot 10^{-5}\,, 0) = q\,(-5v_0 \cdot 10^{-5}\,, 0\,, 0\,)\ N;$$
$$\boxed{\vec{F}_m = (-5qv_0 \cdot 10^{-5}\,, 0\,, 0\,)\ N.}$$

Problema 1b.

Se acelera un ion Cl⁻ hasta una velocidad de $\vec{v} = 1{,}5 \cdot 10^5\,\vec{\jmath}\ m/s$. Este ion viaja libremente hasta que penetre en una región con campo magnético uniforme $\vec{B} = -1{,}2\,\vec{k}\ T$. Tras esto, el ion describe una trayectoria circular de radio $R = 4{,}6\ cm$.

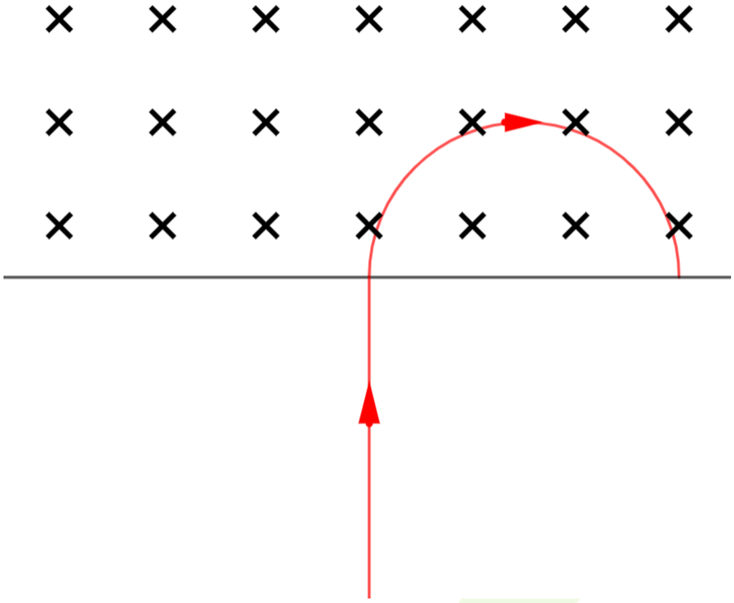
a) Indica el sentido de giro del ion.
b) Calcula la masa del Cl^-.
c) Determina el campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) que habría que aplicar en esta región para que el Cl^- siguiera viajando sin desviarse.

Datos: Constante de Coulomb: $k = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$. Valor absoluto de la carga del electrón: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$.

SOLUCIÓN

a) La velocidad del ion es paralela al eje y y el campo magnético es paralelo al eje z, por lo que la trayectoria circular del ion estará contenida en el plano xy. Para determinar el sentido de giro, bastará con comprobar si la fuerza magnética que siente la carga al entrar en la región con campo tiene sentido positivo o negativo en el eje x.

Como la fuerza magnética viene dada por $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, basta con determinar la dirección (eje x) y sentido de la fuerza, pero no necesitamos saber su módulo. Por ello, simplemente tomaremos $q = -e$ (el Cl^- tiene la misma carga que un electrón), $\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{\jmath}$ y $\vec{B} = -|\vec{B}|\,\vec{k}$. Por tanto, $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B} = -e|\vec{v}||\vec{B}|(\vec{\jmath}) \times (-\vec{k}) = e|\vec{v}||\vec{B}|\,\vec{\jmath} \times \vec{k} = e|\vec{v}||\vec{B}|\,\vec{\imath}$. Así, la fuerza apunta inicialmente en el sentido positivo. Por tanto, la trayectoria que seguirá la carga es la que se indica en la siguiente imagen:



Se ha representado trayectoria que seguirá el ion en color rojo, donde el eje horizontal es el eje x, y el eje vertical es el eje y. La recta horizontal representa la separación entre la región en la que hay campo magnético y la que no.

b) Cuando la carga se encuentra en la región con campo magnético, la fuerza magnética actúa como fuerza centrípeta. Por tanto, $\vec{F}_m = \vec{F}_c$, es decir, $|\vec{F}_m| = |\vec{F}_c|$. Entonces:

$$e|\vec{v}||\vec{B}| = m \cdot \frac{|\vec{v}|^2}{R},$$

donde R es el radio de la trayectoria circular. Despejando de esta expresión, vemos que la masa de la carga satisface

$$m = \frac{e|\vec{B}|R}{|\vec{v}|} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}046}{1{,}5 \cdot 10^5},$$

donde hemos introducido los datos del enunciado. Finalmente,

$$\boxed{m = 5{,}89 \cdot 10^{-26}\ kg.}$$

A modo de comprobación, podemos multiplicar esta masa por el número de Avogadro, $N_A = 6{,}033 \cdot 10^{23}$, para ver que, según nuestro resultado, la masa de un mol de iones Cl⁻ es $m_{mol} = m \cdot N_A = 35{,}46\ g$. Este valor es similar al valor real, por lo que el resultado obtenido parece correcto.

c) Para que el ion siga viajando sin desviarse, el campo eléctrico debe ser tal que la fuerza eléctrica sea igual el módulo y dirección a la fuerza magnética, pero de sentido opuesto. En módulo, se debe cumplir $|\vec{F}_e| = |\vec{F}_m|$. Entonces, al ser la velocidad inicial perpendicular al campo magnético:

$$|q||\vec{E}| = |\vec{F}_e| = |\vec{F}_m| = |q||\vec{v}||\vec{B}|; \quad |\vec{E}| = |\vec{v}||\vec{B}| = 1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 1{,}2;$$

$$\boxed{|\vec{E}| = 1{,}8 \cdot 10^5\ \frac{N}{C}.}$$

Como vimos en el apartado a), inicialmente la fuerza magnética apunta en el sentido positivo del eje x. Así, la fuerza eléctrica tendrá que apuntar en el sentido negativo del eje x. Al ser el Cl⁻ una carga negativa, el campo eléctrico debe tener sentido contrario a la fuerza negativa. Por tanto:

$$\boxed{|\vec{E}| = 1{,}8 \cdot 10^5\ \vec{\imath}\ \frac{N}{C}.}$$

Problema 2a.

El cesio tiene un trabajo de extracción de $2{,}1\ eV$, mientras que el del aluminio es $4{,}08\ eV$. Se dispone de una muestra de cada uno de estos metales, y ambas muestras son iluminadas con una luz azul con longitud de onda $450\ nm$.

a) ¿Alguna de las dos muestras emitirá electrones?
b) En caso de que la respuesta del apartado anterior sea afirmativa para alguna muestra o ambas, calcula su/sus potencial/es de frenado.
c) Suponiendo que la velocidad de los electrones emitidos es mucho menor que c, calcula la velocidad máxima de los fotones emitidos.

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón: $e = |q_e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$. Masa del electrón: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$. Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$. Constante de Planck: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$.

SOLUCIÓN

a) Para que alguna muestra emita electrones, la energía de la luz con la que se ilumina debe ser mayor que el trabajo de extracción. Por ello, debemos calcular la energía de la luz:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{4{,}5 \cdot 10^{-7}} = 4{,}42 \cdot 10^{-19}\ J.$$

Para poder comparar estas energías con los trabajos de extracción, debemos expresar esta energía en electronvoltios o expresar los trabajos de extracción en julios. De cara al siguiente apartado, resultará más conveniente la primera opción:

$$E = 4{,}42 \cdot 10^{-19}\ J \frac{1\ eV}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J} = 2{,}76\ eV.$$

Como la energía de la luz azul de $450\ nm$ es mayor que el trabajo de extracción del cesio, el cesio emitirá electrones. Sin embargo, la energía es menor que el trabajo de extracción del aluminio, así que en este metal no se producirá efecto fotoeléctrico.

Para los siguientes apartados trabajaremos únicamente con el cesio, ya que vemos que es el único metal en el que ocurre la emisión.

b) El potencial de frenado V_f satisface la relación $E = W + e \cdot V_f$, donde W es el trabajo de extracción. Por tanto, podemos calcular el potencial de frenado mediante

$$V_f = \frac{E - W}{e}.$$

Al ser E/e y W/e iguales a E y W expresados en electronvoltios (respectivamente), el potencial de frenado es $V_f = 2{,}76 - 2{,}1$, es decir,

$$\boxed{V_f = 0{,}66\ V.}$$

c) La energía cinética máxima de los fotones emitidos viene dada por $E_{c,max} = E - W$. El trabajo de extracción del cesio es, en julios,

$$W_{Cs} = 2{,}1\ eV = 2{,}1\ eV \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J}{1\ eV} = 3{,}36 \cdot 10^{-19}\ J.$$

Por tanto, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es

$$E_{c,max} = 4{,}42 \cdot 10^{-19} - 3{,}36 \cdot 10^{-19} = 1{,}06 \cdot 10^{-19}\ J.$$

Al ser la velocidad de los electrones mucho menor que la velocidad de la luz, la energía cinética máxima será $E_{c,max} = (1/2) \cdot m \cdot v_{max}^2$. Entonces, tendremos

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{c,max}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}06 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}06 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{2{,}33 \cdot 10^{11}};$$

$$\boxed{v_{max} = 4{,}83 \cdot 10^5\ \frac{m}{s}.}$$

Problema 2b.

En 1945 se crearon y detonaron las primeras bombas atómicas. Una de ellas, apodada *Fat Man*, contenía $6{,}2\ kg$ de plutonio-239, que tiene un periodo de semidesintegración de 24.200 años ($24{,}2 \cdot 10^3$ años). Si no se hubiera detonado esta bomba, calcula:

a) ¿Qué masa de plutonio-239 quedaría en la actualidad (año 2026)?
b) ¿Cuánto tiempo tendría que pasar hasta que queden $500\ g$?
c) El plutonio se produce mediante el proceso ${}^{239}_{93}Np \rightarrow {}^{239}_{94}Pu$. ¿Qué tipo de partícula se emite en este proceso?

Datos: Valor absoluto de la carga del electrón: $e = |q_e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$. Masa del electrón: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg$. Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$. Constante de Planck: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$.

SOLUCIÓN

a) Con el periodo de semidesintegración ($t_{1/2}$) podemos calcular la constante de desintegración (λ). Por comodidad, trabajaremos con el tiempo medido en años. La constante de desintegración viene dada por

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = \frac{\ln(2)}{24.200} = 2{,}86 \cdot 10^{-5}\ años^{-1}.$$

La masa como función del tiempo viene dada por $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$. Desde 1945 hasta 2026 han pasado 2026−1945=81 años. Por tanto, la masa (medida en gramos) que quedaría hoy sería

$$m(81\ años) = 6.200 \cdot e^{-2{,}86 \cdot 10^{-5} \cdot 81};$$

$$\boxed{m(81\ años) = 6.185{,}63\ g.}$$

b) A partir de $m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$, buscamos el tiempo t para el que $m(t) = 500\ g$, es decir,

$$500 = 6.200 \cdot e^{-\lambda t}; \quad e^{-\lambda t} = \frac{500}{6.200} = \frac{5}{62}; \quad -\lambda t = \ln\left(\frac{5}{62}\right);$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{5}{62}\right)}{-\lambda} = \frac{-2{,}52}{-2{,}86 \cdot 10^{-5}};$$

$$\boxed{t = 87.900\ años.}$$

Esta es la cantidad de años que tiene que pasar para que una muestra de $6{,}2\ kg$ se reduzca a $500\ g$. Sin embargo, como ya habrían pasado $81\ años$ desde 1945 hasta la actualidad, todavía tendrían que pasar, aproximadamente, otros $87.800\ años$.

c) Este es un proceso en el que se parte de un núcleo con 239 nucleones y se termina con otro núcleo con el mismo número de nucleones. Además, el número de protones en el núcleo aumenta en una unidad, por lo que esta es una desintegración de tipo β^-, es decir, se emite un electrón (y un neutrino) en el proceso.

Cuestiones

1. La nota “la 4” es una onda sonora con una frecuencia de $440\ Hz$. Si la velocidad del sonido en el aire es $340\ m/s$, ¿cuál es la longitud de onda del “la 4”?
   a) $1{,}86\ m.$
   b) $1{,}29\ m.$
   c) $0{,}77\ m.$
2. Un altavoz emite una onda sonora esférica. A $10\ m$ de la fuente, la intensidad de la onda es de $20\ W/m^2$. ¿A qué distancia del altavoz habría que situarse para que la intensidad de la onda sea $5\ W/m^2$?
   a) $40\ m.$
   b) $20\ m.$
   c) $15\ m.$

3. La velocidad de la luz en el vacío es $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$. Sabiendo que el vidrio tiene un índice de refracción $n = 1{,}5$, ¿cuál es la velocidad de la luz en el vidrio?
    a) $2 \cdot 10^8\ m/s$.
    b) $3 \cdot 10^8\ m/s$.
    c) $4{,}5 \cdot 10^8\ m/s$.
4. El índice de refracción del vidrio es $n = 1{,}5$ y el del aire es $n = 1$. ¿Cuál es el ángulo de reflexión interna total (ángulo a partir del cual se refleja toda la luz que incide desde el vidrio en la frontera entre los dos medios)?
    a) $41{,}81º$.
    b) $59{,}24º$.
    c) $48{,}59º$.
5. Un haz de luz monocromática índice desde el agua ($n_{agua} = 1{,}33$) en un material transparente con índice de refracción $n = 1{,}75$. Si el ángulo de incidencia es $45º$, ¿cuál es el ángulo de refracción?
    a) $18{,}45º$.
    b) $32{,}51º$.
    c) $25{,}83º$.
6. Se coloca un objeto frente a una lente delgada convergente. En relación a la imagen generada se puede afirmar:
    a) Siempre se genera una imagen real.
    b) No siempre se genera imagen, y si se genera puede ser real o virtual.
    c) No siempre se genera imagen, pero si se genera siempre es real.
7. Se colocan cuatro masas iguales, de magnitud M, en los puntos $(0{,}0)$, $(2{,}0)$, $(0{,}4)$, $(2{,}4)$. En estas condiciones se quiere lleva una masa m desde el punto $(1{,}1)$ hasta el punto $(5{,}5)$, y se consideran dos caminos:
    - Camino A: Se lleva la masa m de $(1{,}1)$ a $(1{,}5)$ paralela al eje y, y después se lleva de $(1{,}5)$ a $(5{,}5)$ paralela al eje x.
    - Camino B: Se lleva la masa m de $(1{,}1)$ a $(5{,}1)$ paralela al eje x, y después se lleva de $(5{,}1)$ a $(5{,}5)$ paralela al eje y.

    a) El trabajo realizado al llevar la masa por el camino A es menor que el trabajo al llevarla por el camino B.
    b) El trabajo realizado al llevar la masa por el camino A es mayor que el trabajo al llevarla por el camino B.
    c) El trabajo realizado es el mismo en ambos caminos.
8. Una bola de tenis tiene una masa de $57\ g$, Un tenista profesional lanza la pelota a una velocidad de $250\ km/h$. Sabiendo que la constante de Planck es $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$, ¿cuál es su longitud de onda de De Broglie?
    a) $4{,}65 \cdot 10^{-38}\ m$.
    b) $1{,}67 \cdot 10^{-34}\ m$.
    c) $4{,}65 \cdot 10^{-35}\ m$.

Problema 3

Una empresa quiere colocar un satélite de masa $m = 100\ kg$ en una órbita circular alrededor de la Tierra, a una altura $h = 500\ km$ sobre la superficie. 6 meses después de la puesta en órbita se hace una maniobra para cambiar el satélite a otra órbita circular, situada a una altura de $1.000\ km$ más alta que la órbita anterior.

a) Calcula la aceleración que sufre el satélite como consecuencia de la gravedad de la Tierra cuando se encuentra en la primera órbita.
b) ¿Cuánto cambia el periodo orbital al hacer el cambio de órbita?

c) ¿Cuánta energía hay que suministrar al satélite para que cambie de órbita?

Datos: Constante de la gravitación universal: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\,m^2/kg^2$, masa de la Tierra: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$, radio de la Tierra: $R_T = 6370\ km$.

SOLUCIÓN

a) La aceleración que sufre el satélite es el módulo del campo gravitatorio generado por la Tierra. El módulo del campo gravitatorio en un punto situado a una distancia d del centro de la Tierra viene dado por

$$|\vec{g}| = \frac{GM_T}{d^2}.$$

Como la órbita es circular, a lo largo de toda la órbita la distancia entre el satélite y la Tierra es la misma, y es igual al radio de la órbita. Este radio será igual al radio de la Tierra más la altura de la órbita sobre la superficie terrestre. Escribiendo todo en metros (unidad del S.I.): $R_{orb} = R_T + h = 6.370.000 + 500.000 = 6.870.000\ m = 6{,}87 \cdot 10^6\ m$.

Finalmente, usando los datos del enunciado, la aceleración será:

$$a = |\vec{g}| = \frac{GM_T}{R_{orb}^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{(6{,}87 \cdot 10^6)^2} = 8{,}44\ m/s^2.$$

b) Para saber cuánto cambia el periodo al cambiar de órbita, debemos conocer el periodo que tendrá el satélite en cada órbita. Para calcular ambos periodos, podemos usar la fórmula de la tercera ley de Kepler si la recordamos o, en caso contrario, la deducimos.

En una órbita circular, la fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta, de manera que el módulo de la fuerza será igual al módulo de una fuerza centrípeta (que siempre es igual a $m \cdot v^2/R$, donde m es la masa del cuerpo que orbita, v es su velocidad y R es le radio de la órbita). Por tanto, se tiene:

$$\frac{GM_T m}{R_{orb}^2} = |\vec{F_g}| = |\vec{F_c}| = \frac{mv^2}{R_{orb}}; \quad \frac{GM_T m}{R_{orb}^2} = \frac{mv^2}{R_{orb}}; \quad \boxed{\frac{GM_T}{R_{orb}} = v^2}.$$

Esto nos da una expresión para la velocidad en términos de la masa de la Tierra y del radio de la órbita. Además, la velocidad vendrá data también por $v = 2\pi R_{orb}/T$, al tardar un tiempo T (periodo) en recorrer una órbita completa, de longitud $2\pi R_{orb}$. Así,

$$v = \frac{2\pi R_{orb}}{T}; \quad v^2 = \left(\frac{2\pi R_{orb}}{T}\right)^2; \quad \boxed{v^2 = \frac{4\pi^2 R_{orb}^2}{T^2}}.$$

Igualando estas dos expresiones encontramos una relación entre el periodo de la órbita, su radio y la masa de la Tierra (es decir, encontramos la tercera ley de Kepler):

$$\frac{GM_T}{R_{orb}} = v^2 = \frac{4\pi^2 R_{orb}^2}{T^2}; \quad \frac{GM_T}{R_{orb}} = \frac{4\pi^2 R_{orb}^2}{T^2}; \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} R_{orb}^3; \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} R_{orb}^3}}.$$

Aplicando la fórmula a cada una de las órbitas, podemos calcular ambos periodos. En la primera órbita, ya vimos que el radio orbital era $R_{orb,1} = 6{,}87 \cdot 10^6\ m$. Para la segunda órbita, volverá a ser $R_{orb,2} = R_T + h$. En este caso hay que tener en cuenta un detalle: el dato de la altura de esta órbita no nos habla sobre la altura respecto de la superficie, sino de la altura respecto a la primera órbita. Por tanto, la altura sobre la superficie en la segunda órbita será $h_2 = h_1 + \Delta h = 500\ km + 1000\ km = 1500\ km = 1{,}5 \cdot 10^6\ m$. Entonces, el radio de la segunda órbita será $R_{orb,2} = R_T + h_2 = 6{,}37 \cdot 10^6 + 1{,}5 \cdot 10^6 = 7{,}87 \cdot 10^6\ m$. Sustituyendo en la ecuación de la tercera ley de Kepler:

$$T_1 = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} R_{orb,1}^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}} (6{,}87 \cdot 10^6)^3} = 5{,}67 \cdot 10^3\ s = 94{,}5\ min,$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} R_{orb,2}^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}} (7{,}87 \cdot 10^6)^3} = 6{,}95 \cdot 10^3\ s = 115{,}86\ min.$$

Conociendo ambos periodos, podemos calcular finalmente su diferencia:

$$T_2 - T_1 = 6{,}95 \cdot 10^3 - 5{,}67 \cdot 10^3$$

$$\boxed{T_2 - T_1 = 1{,}28 \cdot 10^3\ s} = 21{,}37\ min.$$

c) La energía que hay que suministrar al satélite para cambiar de órbita será la diferencia de las energías mecánicas que tiene en cada órbita, es decir, la energía en la órbita final menos la energía en la inicial. Como las dos órbitas son circulares, la velocidad del satélite en la órbita vendrá dada por

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_{orb}}},$$

como vimos en el apartado anterior. Además, la energía mecánica en la órbita será

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{GM_T m}{R_{orb}} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{GM_T}{R_{orb}} - \frac{GM_T m}{R_{orb}} = -\frac{GM_T m}{2R_{orb}}.$$

Por tanto, la diferencia de energía mecánica es

$$\Delta E = E_{M,2} - E_{M,1} = -\frac{GM_T m}{2R_{orb,2}} + \frac{GM_T m}{2R_{orb,1}} = \frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{R_{orb,1}} - \frac{1}{R_{orb,2}}\right) =$$

$$= \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 100}{2}\left(\frac{1}{6{,}87 \cdot 10^6} - \frac{1}{7{,}87 \cdot 10^6}\right);$$

$$\boxed{\Delta E = 3{,}68 \cdot 10^8\ J.}$$