INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

1. **Responda a las tres preguntas siguientes (calificación: 2 puntos por pregunta):**

Pregunta 1. Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene $A(1,0,2)$ como punto de partida y un cierto tramo de autopista esta contenido en el plano $\pi: x + y + 2z + 1 = 0$. Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano π. Se toma el punto $C(0,-3,1)$ de π para calibrar el dron.

a) (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano π y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano π. Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.
b) (1 punto) Responda sólo a uno de los dos apartados siguientes:
   a. El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto mas cercano a C. Halle una ecuacion de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C.
   b. La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definicion. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano π para situarse en A', a la mitad de la distancia original. Calcule el angulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A'.

Pregunta 2. Dada $f(x) = \frac{x^2+1}{|x|+1}$, se pide:

a) (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de $f(x)$.
b) (1 punto) Hallar $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Pregunta 3. Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad *escudete*. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.
b) (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60% de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

2. Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación: 2 puntos)

Pregunta 4.1. Sean $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que la matriz AA^t sea una matriz diagonal.
b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Pregunta 4.2. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$. Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real λ.
b) (1 punto) Resolver el sistema si $\lambda = -1$.

3. Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación: 2 puntos)

Pregunta 5.1. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos(x)) & si \quad 0 \le x < \pi/2 \\ a\,\mathrm{sen}(x) + 4 & si \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 2\mathrm{sen}(2x) + b & si \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

a) (1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0,2\pi]$.
b) (1 punto) Justifique razonadamente que la función $f(x)$ tiene una única raíz en $(0,2\pi)$ y calcule dicha raíz.

Pregunta 5.2. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{ln\,(x^2+1)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
b) (1 punto) Determinar si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 0$.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene $A(1,0,2)$ como punto de partida y un cierto tramo de autopista esta contenido en el plano $\pi: x+y+2z+1=0$. Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano π. Se toma el punto $C(0,-3,1)$ de π para calibrar el dron.

a) **(1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano π y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano π. Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.**
b) **(1 punto) Responda sólo a uno de los dos apartados siguientes:**
   a. **El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto mas cercano a C. Halle una ecuacion de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C.**
   b. **La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definicion. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano π para situarse en A', a la mitad de la distancia original. Calcule el angulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A'.**

SOLUCIÓN:

a) De la ecuación del plano podemos obtener que un vector normal a π es

$$\vec{n}_\pi = (1,1,2).$$

Como $C(0,-3,1)$ es un punto del plano, podemos considerar el vector $\overrightarrow{AC} = (-1,-3,-1)$, de manera que la distancia d entre el punto A y el plano π se relaciona con estos dos vectores a través de $|\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AC}| = ||\vec{n}_\pi|| \cdot d$, es decir,

$$d = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AC}|}{||\vec{n}_\pi||} = \frac{|1\cdot(-1)+1\cdot(-3)+2\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{|-1-3-2|}{\sqrt{6}} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}};$$

$$\boxed{d = \sqrt{6}\, u.}$$

Otra manera más directa de resolver este apartado es calcular la distancia a través de la fórmula general de distancia entre un punto y un plano. Como esa fórmula general se obtiene a partir de $|\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AC}| = ||\vec{n}_\pi|| \cdot d$, preferimos usar esta relación por ser más intuitiva (es una consecuencia directa de la definición de producto escalar y de la trigonometría de la situación, usando que $d = ||\overrightarrow{AC}|| \cdot \cos(\alpha)$, siendo α el ángulo que forman $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{n}_\pi$).

Para encontrar la ecuación del plano en el que se mueve el dron, que llamaremos π', basta con darnos cuenta de que, al estar el dron en todo momento a la misma distancia de π, π y π' setán perpendiculares, de manera que $\vec{n}_\pi = (1,1,2)$ también será un vector normal de π'. Así, la ecuación del plano vendrá dada por

$$\pi': x+y+2z+D=0.$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Como sabemos que $A(1,0,2)$ pertenece a π', podemos calcular D al imponer que las coordenadas de A satisfagan la ecuación de π'. Entonces, se cumple $1+0+2\cdot 2+D=0$; $5+D=0$; $D=-5$. Por tanto, la ecuación del plano de vuelo es

$$\boxed{\pi': x+y+2z-5=0.}$$

b)

a. La recta que pasa por C y es perpendicular a π tendrá como vector director el vector normal de π. Así, las ecuaciones paramétricas de esta recta, que llamaremos r, son

$$r:\begin{cases} x=0+\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

Si llamamos B al punto desde el que el dron toma las fotos de C, este será el punto de intersección de la recta r y el plano π' (porque el dron siempre se encuentra en π' y las fotos de C tienen que tomarse perpendicularmente al plano, es decir, desde r). Introduciendo las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de π' podemos calcular el valor de λ tal que, al introducirlo en las ecuaciones de r, obtenemos el punto $B=r\cap\pi'$:

$$(0+\lambda)+(-3+\lambda)+2(1+2\lambda)-5=0; \quad 6\lambda-6=0; \quad \lambda=1.$$

Calculando el punto de r correspondiente a $\lambda=1$, llegamos a que las coordenadas de B son:

$$B(1,-2,3).$$

La recta de la trayectoria que sigue el dron para ir de A a B será aquella que contenga a estos dos puntos (llamaremos s a esta recta). Por tanto, podemos tomar como vector director de esta recta al vector $\overrightarrow{AB}=(0,-2,1)$. Sabiendo que s contiene a A y tiene este vector director, las ecuaciones paramétricas de la recta vienen dadas por

$$\boxed{s:\begin{cases} x=1+0\cdot\mu \\ y=0-2\cdot\mu \\ z=2+1\cdot\mu \end{cases} \quad es\ decir, \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-2\mu \\ z=2+\mu \end{cases}}$$

donde $\mu\in\mathbb{R}$.

b. La trayectoria que seguirá el dron para descender será una recta (la llamaremos r) que contiene a A y es perpendicular a π, por lo que $\vec{n}_\pi$ será un vector director de esa recta. Así, las ecuaciones paramétricas de esta secta serán

$$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$$

Si llamamos B al punto de intersección de esta recta con π (es decir, B es el punto del plano sobre el que se encuentra el dron), podemos calcular las coordenadas de B como a través de la intersección de la recta de r y π. Podremos calcular el valor de λ correspondiente a B (el valor de λ tal que al merlo en las ecuaciones paramétricas de r obtenemos las coordenadas de B) introduciendo las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de π:

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

$$(1+\lambda)+(\lambda)+2(2+2\lambda)+1=0; \quad 6\lambda+6=0; \quad \lambda=-1.$$

Calculando el punto de r correspondiente a $\lambda=-1$, llegamos a que las coordenadas de B son:

$$B(0,-1,0).$$

El punto A' que nos preguntan es el punto medio entre A y B, cuyas coordenadas son:

$$A'\left(\frac{1+0}{2},\frac{0-1}{2},\frac{2+0}{2}\right); \quad A'\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},1\right).$$

El ángulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A' es el ángulo complementario ($90º-\alpha$) del ángulo formado por la recta que pasa por C y A' (cuyo vector director es $\vec{v}=2\cdot\overrightarrow{CA'}=2\cdot(-1/2,-5/2,0)=(-1,-5,0)$) y el vector normal al plano. Este último ángulo lo podemos calcular a través del producto escalar:

$$|\vec{v}\cdot\vec{n}_\pi|=||\vec{v}||\cdot||\vec{n}_\pi||\cdot\cos(\alpha);$$

$$|-1\cdot1-5\cdot1+0\cdot2|=\sqrt{1^2+(-5)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\cos(\alpha);$$

$$6=\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}\cdot\cos(\alpha); \quad \cos(\alpha)=\frac{6}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}}; \quad \alpha=\arccos\left(\frac{6}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}}\right)\simeq 61{,}29^{\text{a}}.$$

De esta manera, podemos calcular el complementario de este ángulo, que es el que pregunta el ejercicio:

$$\boxed{\beta=90º-\alpha\simeq 28{,}71º.}$$

Pregunta 2. Dada $f(x)=\frac{x^2+1}{|x|+1}$, se pide:

a) **(1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de $f(x)$.**
b) **(1 punto) Hallar $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.**

SOLUCIÓN:

a) Para analizar la paridad, calculamos $f(-x)$ y comprobamos si coincide con $f(x)$ o con $-f(x)$ (o con ninguna de ellas). Así,

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{|-x|+1}=\frac{(-1)^2x^2+1}{|-x|+1}=\frac{x^2+1}{|x|+1}=f(x),$$

ya que $|-x|=|x|$. Entonces, como $f(-x)=f(x)$, la función es par. Podríamos aplicar este resultado al cálculo de extremos relativos (si $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x_0>0$, también tendrá un extremo relativo en $-x_0$), pero no haremos esto para no simplificar la función: creemos que puede ser ilustrativo trabajar con el valor absoluto porque tiende a dar problemas.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Para analizar los extremos relativos, va a ser más cómodo entender $f(x)$ como una función definida a trozos. Como

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

entonces

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{1+x} & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{1-x} & si\ x < 0 \end{cases}$$

Como cada uno de los "trozos" de la función es derivable individualmente en su dominio (más precisamente en el interior de su dominio), los extremos relativos podrán estar o bien en puntos donde la derivada de función se anule o bien en el punto donde cambia la definición de la función ($x = 0$). Si empezamos por calcular la derivada,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(1+x)-(x^2+1)}{(1+x)^2} & si\ x > 0 \\ \dfrac{2x(1-x)+(x^2+1)}{(1-x)^2} & si\ x < 0 \end{cases}$$

Para calcular los puntos donde se anula la derivada, vamos a centrarnos en los casos $x > 0$ y $x < 0$ por separado.

Caso $x > 0$: $f'(x) = \frac{2x(1+x)-(x^2+1)}{(1+x)\text{^}2} = 0$. Como el denominador es siempre distinto de cero ($(1+x)^2 > 1$ para cualquier $x > 0$), la fracción se anulará si y sólo si se anula el numerador, es decir,

$$2x(1+x) - (x^2+1) = 0; \quad 2x + 2x^2 - x^2 - 1 = 0;$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Vemos que, en este caso, la derivada se anulará en los valores de x que satisfagan esta ecuación. Resolviendo la ecuación encontramos dos soluciones_

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Como partimos de $x > 0$, sólo una de estas dos soluciones es realmente un punto donde se anula la derivada: $x = \sqrt{2} - 1$. Para ver si este punto es un extremo relativo, podríamos calcular la derivada segunda de la función (no recomendable por ser un cálculo largo) o podemos ver cuáles son los signos de la derivada "cerca" de $x = \sqrt{2} - 1$. Como la derivada es una función continua en $(0, +\infty)$ y sólo se anula en $x = \sqrt{2} - 1$, el signo de la derivada será constante en todo el intervalo $(0, \sqrt{2} - 1)$, y también en todo el intervalo $(\sqrt{2} - 1, +\infty)$. Así, para ver cómo se comporta la derivada cerca de $x = \sqrt{2} - 1$, basta con evaluar la derivada en un punto cualquier del intervalo $(0, \sqrt{2} - 1)$ y también en un punto de $(\sqrt{2} - 1, +\infty)$, y así sabremos cuál será el signo de $f'(x)$ cerca de $x = \sqrt{2} - 1$.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Eligiendo, por ejemplo, los puntos $x = 0{,}2$ y $x = 1$, obtenemos $f'(0{,}2) \simeq -0.39 < 0$ y $f'(1) = 0{,}5 > 0$. Vemos entonces que la derivada de $f(x)$ es negativa a la izquierda de $x = \sqrt{2} - 1$ y positiva a la derecha, es decir, $f(x)$ decrece a la izquierda de $x = \sqrt{2} - 1$ y crece a la derecha, por lo que $x = \sqrt{2} - 1$ es un mínimo de la función, y este es el único extremo relativo.

Caso $x < 0$: Como ya dijimos antes, podríamos analizar este caso inmediatamente a través de la paridad de f (por ser una función par, sabemos que va a tener un mínimo en $x = -(\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}$, y ningún otro extremo relativo). Ignorando la paridad, procederemos igual que en el caso anterior, pero explicando menos el proceso por ser exactamente el mismo.

Ahora, $f'(x) = \frac{2x(1-x)+(x^2+1)}{(1-x)^\wedge 2} = 0$. Otra vez, como el denominador es siempre distinto de cero ($(1-x)^2 > 1$ para cualquier $x < 0$), la fracción se anulará si y sólo si se anula el numerador, es decir,

$$2x(1-x) + (x^2+1) = 0; \quad 2x - 2x^2 + x^2 + 1 = 0;$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Encontramos que las soluciones son

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Como partimos de $x < 0$, la única solución válida es $x = 1 - \sqrt{2}$. Al igual que en el caso anterior, por ser la derivada continua en $(-\infty, 0)$ y anularse sólo en $x = 1 - \sqrt{2}$, el signo de la derivada será constante tanto en $(-\infty, 1 - \sqrt{2})$ como en $(1 - \sqrt{2}, 0)$. Calculando la derivada en, por ejemplo. $x = -1$ y $x = -0{,}2$, tenemos $f'(-1) = -0{,}5 < 0$ y $f'(-0{,}2) \simeq 0.39 > 0$. Así, la función decrece a la izquierda de $x = 1 - \sqrt{2}$ y crece a su derecha, por lo que $x = 1 - \sqrt{2}$ es un mínimo.

Por último, como $x = 0$ es un punto donde cambia la definición de la función, debemos estudiar si es un extremo relativo. Como ya hemos visto, la derivada en $(0, \sqrt{2} - 1)$ tiene siempre el mismo signo (negativo), y lo mismo ocurre en $(1 - \sqrt{2}, 0)$ (positivo). Como la función está definida en $x = 0$ ($f(0) = 1$) y es continua en $x = 0$ (aunque no es derivable), vemos que la función es estrictamente creciente a la izquierda de $x = 0$ y decreciente a la derecha, de manera que la función tiene un máximo en $x = 0$.

A modo de resumen, los extremos relativos de la función son:

Mínimos en:

$\left(\sqrt{2} - 1, f(\sqrt{2} - 1)\right) = \left(\sqrt{2} - 1, \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} - 2)$ y en

$\left(1 - \sqrt{2}, f(1 - \sqrt{2})\right) = (1 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$.

Máximo en: $(0, f(0)) = (0,1)$.

b) Como queremos calcular la integral definida en el intervalo $(-1,0)$, y en todo ese intervalo se tiene $|x| = -x$, la integral que debemos calcular es

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{|x|+1}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{1-\mathrm{x}}\, dx.$$

Por comodidad, podríamos tomar el cambio de variable $u = -x$ para que no aparezcan tantos signos negativos, pero no lo vamos a hacer. Dividiendo los polinomios, tenemos que $x^2 + 1 = (-x-1)(1-x) + 2$, por lo que $\frac{x^2+1}{1-x} = (-x-1) + \frac{2}{1-x}$. Así, calculamos fácilmente la integral:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{1-\mathrm{x}}\, dx = \int_{-1}^{0} \left[(-x-1) + \frac{2}{1-x}\right] dx = \left[-\frac{x^2}{2} - x - 2\ln(1-x)\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left[-\frac{0^2}{2} - 0 - 2\ln(1-0)\right] - \left[-\frac{(-1)^2}{2} - (-1) - 2\ln\big(1-(-1)\big)\right]$$

$$= -2\ln(1) + \left[\frac{1}{2} - 1 + 2\ln(2)\right] = \boxed{\frac{-1}{2} + 2\ln(2)\,.}$$

Pregunta 3. Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad *escudete*. Se pide:

a) **(1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.**
b) **(1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60% de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete.**

SOLUCIÓN:

a) Como una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad, la probabilidad de que una aceituna elegida al azar tenga escudete es $P(E) = 1/20$, y por tanto, la probabilidad de su complementario (la probabilidad de que la aceituna no tenga escudete es $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$; $P(\bar{E}) = 19/20$.

Como cada bolsa tiene 12 aceitunas, suponiendo que las aceitunas que se meten en cada bolsa se eligen al azar de manera independiente (de manera que elegir una aceituna enferma o sana no dependa de las demás aceitunas), la probabilidad de que ninguna aceituna tenga escudete será el producto de las probabilidades de que cada una de ellas no esté enferma. De esta forma, si llamamos B al suceso "la bolsa de 12 aceitunas no tiene ninguna aceituna contagiada por la enfermedad", tendremos

$$\boxed{P(B) = \left(P(\bar{E})\right)^{12} = \left(\frac{19}{20}\right)^{12} \simeq 0{,}54036.}$$

b) Como hemos visto en el apartado anterior, la probabilidad de que una bolsa no tenga ninguna aceituna con escudete es $P(B) \simeq 0{,}54036$, por lo que la probabilidad de que una bolsa tenga por lo menos una aceituna con escudete será $P(\bar{B}) \simeq 0{,}45964$. Tenemos entonces dos posibilidades al tomar una bolsa: puede tener escudete con probabilidad $p = P(\bar{B})$, o no tenerlo, con probabilidad

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

$q = P(B)$. Así, la probabilidad de que M bolsas de las n seleccionadas tengan la enfermedad seguirá una distribución binomial, $B(n,p)$, concretamente $B(n = 100; p = 0{,}45964)$.

Si queremos saber la probabilidad de que al menos un 60% tengan la enfermedad, debemos calcular $P(M \geq 60) = P(M = 60) + P(M = 61) + \cdots + P(M = 100)$. Este cálculo claramente requeriría mucho tiempo para hacerlo, pero sabemos que, bajo ciertas condiciones, una distribución de probabilidad binomial se puede aproximar por una distribución normal (es decir, la aproximación será buena bajo ciertas condiciones). Estas condiciones son $n \geq 30$, $n \cdot p \geq 5$, $n \cdot q \geq 5$. Estas tres condiciones se cumplen para nuestro caso ($n = 100 \geq 30$, y como $q > p > 0{,}4$, se cumple $n \cdot q > n \cdot p > n \cdot 0{,}4 = 40 > 5$), por lo que podemos aproximar la distribución binomial por una distribución normal. Bajo la aproximación, la distribución binomial $B(n,p)$ se comporta como una normal con media $\mu = n \cdot p$ y desviación $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$, es decir, $B(n,p) \simeq N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q})$, que en nuestro caso será $N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot q}) = N(45{,}964; 4{,}984)$. Como estamos aproximando una distribución binomial (discreta) por una normal (continua), debemos aplicar la corrección de Yates, es decir

$$P_B(M \geq 60) \simeq P_N(M \geq 60 - 0{,}5) = P_N(M \geq 59{,}5),$$

donde llamamos P_B y P_N a las probabilidades calculadas mediante cada distribución. Tipificando la distribución normal, se tiene que la probabilidad buscada es

$$P_N(M \geq 59{,}5) = P\left(Z \geq \frac{59{,}5 - 45{,}964}{4{,}984}\right) \simeq P(Z \geq 2{,}7159) \simeq P(Z \geq 2{,}72).$$

Como en la tabla de la distribución normal aparecen las probabilidades $P(Z < x)$, calcularemos la probabilidad mediante

$$\boxed{P(Z \geq 2{,}72) = 1 - P(Z < 2{,}72) = 1 - 0{,}9967 = 0{,}0033.}$$

Pregunta 4.1. Sean $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2a} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de $\boldsymbol{a}$ tales que la matriz $\boldsymbol{AA^t}$ sea una matriz diagonal.
b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de $\boldsymbol{a}$ tales que $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A^2} - \boldsymbol{B^2}$.

SOLUCIÓN:

a) Calculando AA^t, tenemos

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(a^2+1) & 2(a^2-1) \\ 2(a^2-1) & a^2+1 \end{pmatrix}.$$

Para que AA^t sea diagonal, los elementos de esta matriz que están fuera de la diagonal principal deben ser nulos, es decir, se debe cumplir $2(a^2 - 1) = 0$. Por tanto,

$$2(a^2 - 1) = 0; \quad a^2 - 1 = 0; \quad a^2 = 1; \quad \boxed{a = \pm 1.}$$

Entonces, los valores de a para los que AA^t es diagonal son $a = 1$ y $a = -1$.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

b) Como $(A-B)(A+B) = AA + AB - BA - BB = A^2 + AB - BA - B^2$, se tendrá $(A-B)(A+B = A^2 - B^2$ si y sólo si $AB - BA = 0$, es decir, $AB = BA$ (es decir, si las matrices conmutan). Calculando los dos productos, tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a+1) & 4(a-1) \\ a-1 & 2(a+1) \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para que las dos matrices sean iguales, deben ser iguales componente a componente. Igualando las matrices, vemos que $AB = BA$ si y sólo si $\boxed{a = 1}$.

Pregunta 4.2. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x + \lambda y + z = 7} \\ \boldsymbol{x + 2y + \lambda z = 2} \end{cases}$ **. Se pide:**

a) **(1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real $\boldsymbol{\lambda}$.**
b) **(1 punto) Resolver el sistema si $\boldsymbol{\lambda = -1}$.**

SOLUCIÓN:

a) Llamemos A a la matriz de coeficientes y $\bar{A}$ a la matriz ampliada, de manera que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Una manera sencilla para empezar a discutir el sistema es calcular el determinante de A: si el determinante es distinto de 0, el rango de A será 3 y, por tanto, también será 3 el rango de $\bar{A}$, de manera que el sistema será compatible determinado. Los valores de λ que anulen el determinante (si los hay) serán valores para los que el sistema será compatible indeterminado o incompatible (lo veremos caso a caso). Otra opción sería aplicar el método de Gauss para transformar la matriz ampliada en una matriz escalonada, dejando el parámetro λ indicado. Esto puede resultar más directo, pero los cálculos pueden hacerse incómodos (a veces aparecen fracciones y/o números grandes), y a menudo hay que tener cuidado al obtener los rangos de las matrices de esta manera, lo que puede llevar a errores fácilmente. Por esta razón, preferimos emplear el determinante.

Calculado el determinante, tenemos

$$\det(A) = \lambda^2 + 2 - 4 + \lambda - 4\lambda - 2 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1).$$

Si $\lambda = 4$ o $\lambda = -1$, tendremos $\det(A) = 0$, y en cualquier otro caso, si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1,4\}$, será $\det(A) \neq 0$ y, por tanto, el sistema será un sistema compatible determinado (SCD). Veamos los otros dos casos:

$\lambda = 4$:

La matriz ampliada es

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso podemos ver directamente que la segunda columna es el doble de la primera. Esto nos simplifica el cálculo del rango de $\bar{A}$, ya que cualquier submatriz 3×3 que tomemos de $\bar{A}$ tendrá determinante nulo si contiene a esas dos columnas. Por tanto, la única submatriz que podría tener determinante distinto de 0 sería cualquiera de las dos formadas por las columnas 3 y 4, junto con la 1 o la 2 (y, en estos dos casos, los determinantes serán los mismos salvo por un factor 2). Así, la matriz $\bar{A}$ tendrá rango 3 si y sólo si la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene rango 3, es decir, si su determinante es distinto de 0. Calculando el determinante de B, se tiene $\det(B) = 2 - 7 + 16 - 2 + 4 - 28 = -15 \neq 0$, es decir, B tiene rango 3. Por lo tanto, como B es una submatriz de $\bar{A}$, el rango de $\bar{A}$ también es 3, por lo que $rango(\bar{A}) = 3 \neq 2 = rango(A)$. Por tanto, en este caso tenemos un sistema incompatible (SI).

$\lambda = -1$:

La matriz ampliada es

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora, para calcular el rango de $\bar{A}$, podemos proceder calculando los determinantes de las submatrices 3×3, podemos aplicar el método de Gauss, o podemos fijarnos en que la tercera fila es igual a la primera, de manera que vemos directamente que el rango de $\bar{A}$ es 2, al igual que el rango de A (y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado). Como en el apartado siguiente nos piden resolver el sistema precisamente para el caso $\lambda = -1$, no perderemos tiempo si aplicamos el método de Gauss, ya que nos servirá el cálculo para el apartado siguiente. Si hacemos las transformaciones $F_2 \to 2 \cdot F_1 - F_2$ y $F_3 \to F_3 - F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde vemos lo que ya adelantábamos: $rango(\bar{A}) = 2 = rango(A) < 3$. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado (SCI).

b) Aprovechando el resultado del apartado anterior, vemos que el sistema de ecuaciones original es equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ \quad 5y - 3z = -3 \end{cases}$$

Una manera de obtener la solución general es la siguiente: tomamos z como parámetro libre, es decir, $z = \lambda$. Entonces, de la segunda ecuación se tiene que $y = \frac{3(\lambda-1)}{5}$. Teniendo y y z escritos en

términos de λ, despejamos x de la primera ecuación para obtener $x = 2 + \lambda + \frac{6(1-\lambda)}{5} = \frac{16-\lambda}{5}$. Por tanto, la solución es

$$\boxed{\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \left(\frac{16-\lambda}{5}, \frac{3(\lambda-1)}{5}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Pregunta 5.1. Sea la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8+\cos(x)) & si \quad 0 \le x < \pi/2 \\ a\,\mathrm{sen}(x) + 4 & si \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 2\mathrm{sen}(2x) + b & si \quad \pi \le x \le 2\pi \end{cases}}$$

a) **(1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0, 2\pi]$.**
b) **(1 punto) Justifique razonadamente que la función $f(x)$ tiene una única raíz en $(0, 2\pi)$ y calcule dicha raíz.**

SOLUCIÓN:

a) Las hipótesis del Teorema de Bolzano son que la función sea continua en todo el intervalo estudiado (en este caso $[0,2\pi]$) y que el valor de la función en los extremos tenga signos distintos.

Como f es una función definida a trozos y cada uno de los trozos son funciones continuas, las únicas posibles discontinuidades estarán en los puntos donde cambia la definición de la función: $x = \pi/2$ y $x = \pi$. Para que la función sea continua en esos puntos, los dos límites laterales deben coincidir en ambos casos, y como las funciones de cada trozo son continuas, los límites laterales son iguales a la función correspondiente evaluada en el punto donde se toma el límite. Así, la función será continua si

$$\lim_{x\to\pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to\pi/2^+} f(x) \qquad y \qquad \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x),$$

es decir,

$$\frac{1}{2}\left(-8+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = a\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4 \qquad y \qquad a\,\mathrm{sen}(\pi) + 4 = 2\mathrm{sen}(2\pi) + b;$$

$$\frac{1}{2}(-8) = a + 4 \qquad y \qquad 4 = b; \qquad -4 = a + 4 \qquad y \qquad 4 = b.$$

Por tanto, la función será continua si y sólo si $a = -8$ y $b = 4$. En este caso, debemos comprobar que se satisfaga también la otra hipótesis: $f(0) = -7/2$ y $f(2\pi) = 4$, por lo que $a = -8$ y $b = 4$ es, efectivamente, solución.

b) Como para $a = -8$ y $b = 4$ se cumplen las hipótesis del Teorema de Bolzano, sabemos que f tiene **por lo menos** una raíz en $(0,2\pi)$. Para determinar la unicidad, debemos fijarnos en otras cosas.

En primer lugar, si $0 \leq x < \pi/2$, $f(x) = (-8 + \cos(x))/2$, y como $0 < \cos(x) \leq 1$, tendremos que $-8 < f(x) \leq -7/2$ si $0 \leq x < \pi/2$, por lo que en el intervalo $(0, \pi/2)$ no hay ninguna raíz.

Similarmente, si $\pi \leq x \leq 2\pi$, $f(x) = 2\text{sen}(2x) + 4$, y como $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 0$, tendremos que $2 \leq f(x) \leq 4$ si $\pi \leq x \leq 2\pi$, por lo que en el intervalo $[\pi, 2\pi)$ tampoco puede haber raíces.

Por tanto, todas las raíces de la función f tendrán que estar en $\pi/2 \leq x < \pi$. En este intervalo, $f(x) = -8\,\text{sen}(x) + 4$, y como el seno es una función estrictamente decreciente en $\pi/2 < x < \pi$, $f(x)$ será una función estrictamente creciente en $\pi/2 < x < \pi$. Por esto, y aplicando el Teorema de Bolzano a $-8\,\text{sen}(x) + 4$ en $[\pi/2, \pi]$, vemos que $-8\,\text{sen}(x) + 4$, y por tanto también $f(x)$, tiene una única raíz en $(\pi/2, \pi)$.

Para calcular la raíz, debemos resolver

$$-8\,\text{sen}(x) + 4 = 0; \quad \text{sen}(x) = 1/2.$$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, pero sólo una en el intervalo $(\pi/2, \pi)$:

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{6}.}$$

Pregunta 5.2. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{ln\,(x^2+1)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$. Se pide:

a) **(1 punto) Determinar si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.**
b) **(1 punto) Determinar si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 0$.**

SOLUCIÓN:

a) Como $1 + x^2 \geq 1$, $\boldsymbol{ln\,(x^2 + 1)}$ está bien definido y es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Igualmente, x es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Como el cociente de dos funciones continuas es también una función continua en todos los puntos donde no se anula el denominador, sabemos que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para analizar la continuidad en $x = 0$, debemos comprobar si los límites laterales coinciden y estos son iguales al valor de la función en $x = 0$. Al ser f una función impar, tendremos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(-x) = -\lim_{x \to 0^+} f(x),$$

de manera que bastará con calcular uno de los límites laterales. Entonces:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln\,(\mathrm{x}^2 + 1)}{\mathrm{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x/\,(x^2 + 1)}{1},$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado la regla de L'Hôpital, al tener una indeterminación de la forma $0/0$. El límite ahora es inmediato de calcular, ya que es el límite una función racional (fracción de polinomios) en un punto donde no se anula el denominador. Por tanto, tenemos el límite

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

de una función continua y, para calcularlo, basta con evaluar la función en el punto donde se está tomando el límite:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2\cdot 0}{0^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ y, como $f(0) = 0$, se concluye que la función es continua en $x = 0$. Por tanto, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Por definición, f será derivable en $x = 0$ si existe y es finito el límite

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\mathrm{h}^2+1)\,/h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\mathrm{h}^2+1)}{h^2}.$$

Como en el apartado anterior, aplicamos la regla de L'Hôpital por tener una indeterminación de la forma $0/0$:

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{2h/(\mathrm{h}^2+1)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\mathrm{h}^2+1} = 1.$$

Como este límite existe y es finito, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = L = 1$. Así, podemos calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica mediante $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, de manera que la ecuación de la recta tangente es

$$\boxed{y = x.}$$