BLOQUE 1 (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1

En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:
• El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
• La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
• El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Pregunta 1.2

Sean la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que satisfaga que $(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$

BLOQUE 2

Pregunta 2

Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva: $f(x) = cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función f(x) en el intervalo [0, 12]. ¿Está la curva en este intervalo contenida completamente en el muro?
b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva f(x)?

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

BLOQUE 3 (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1

Dada la recta:

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$

y el plano $\pi: x + 2y - 3z = 1$

Se pide:

a) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

b) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.

c) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es √14.

Pregunta 3.2

Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi: x + y = 2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

BLOQUE 4 (Calificación máxima 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 4.1:

Sea $E = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ y P una medida de probabilidad en E definida por $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y el resto de sucesos elementales equiprobables. Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$, $C = \{3,5,7,11, 13\}$. Se pide calcular:

a) $P\left((\overline{A-C}) \cap B\right)$

b) $P\left((A \cap B) \middle| \overline{C}\right)$

Problema 4.2

Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65,8% entre los de 25 a 64 y al 53,7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

SOLUCIONES

BLOQUE 1 (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1

En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:
• El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
• La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
• El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Solución

Sean x, y, z el número de lanzamientos de 1, 2 y 3 puntos respectivamente.

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 0{,}8x + y + 1{,}2z = 80 \\ \left(\frac{1}{3}\right)y = \left(\frac{1}{5}\right)(x + z) \\ 2z = x + y - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}8x + y + 1{,}2z = 80 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

Resultado final, podemos resolver por Cramer, Gauss o sustitución.

x=Lanzamientos de 1 punto: 25
y=Lanzamientos de 2 puntos: 30
z=Lanzamientos de 3 puntos: 25

Pregunta 1.2

Sean la matriz:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $\boldsymbol{P(\lambda) = det(A - \lambda I)}$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\boldsymbol{\lambda = 5}$, calcular un vector no nulo

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$$

que satisfaga que $\boldsymbol{(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}}$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Solución:

a)

Queremos calcular el determinante de $(A - \lambda I)$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)((3 - \lambda)(2 - \lambda)) - (2)(2 - \lambda)$$

$$= (4 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) - (4 - 2\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

Factorizando el polinomio que hemos calculado, por ejemplo por Ruffini, se obtiene:

Las raíces del polinomio característico son: $\lambda = 2$ (doble), $\lambda = 5$

El polinomio característico factorizado es: $P(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$

b)

Para determinar el vector asociado al autovalor $\lambda = 5$ debemos resolver el Sistema de ecuaciones dado por $\det(A - 5I)\,\vec{v} = \vec{0}$

$$(A - 5I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Como vemos, la segunda fila es proporcional a la segunda por lo que podemos excluirla:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ 3t + 2t - 3z = 0 \Rightarrow z = \frac{5}{3}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, el vector que buscamos es $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ o cualquier vector proporcional a él.

BLOQUE 2

Pregunta 2

Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva: $f(x) = cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función f(x) en el intervalo [0, 12]. ¿Está la curva en este intervalo contenida completamente en el muro?
b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva f(x)?

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Solución

a)

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$$

Sabemos que el coseno oscila entre -1 y 1 de modo que los valores máximo y mínimo de la función serán $f_{mín} = -1 + 2 = 1$ y $f_{max} = 1 + 2 = 3$. Tomando la derivada de la función e igualándola a 0 podemos encontrar los valores de x para los que la función toma estos valores extremos:

$$f'(x) = -\frac{\pi}{9} Sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) \quad \rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{9} Sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0$$

Esto implica que el valor de x debe cumplir:

$$\frac{\pi x}{9} = 0 + k\pi \quad con\ k \in \mathbb{Z}$$

Nótese que hemos reducido las dos soluciones a una combinación de ambas, de esta forma no es necesario hacer dos ecuaciones distintas.

$$\frac{\pi x}{9} = k\pi \ \rightarrow \ x = 9k$$

Considerando que k toma solo valores enteros y buscamos solo aquellos en el intervalo $[0,12]$ encontramos dos valores de x dentro de esta región:

$$Si\ k = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$$

$$Si\ k = 1 \ \Rightarrow \ x = 9$$

Para comprobar la naturaleza de estos puntos críticos empleamos el criterio de la Segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{81} Cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)$$

- Si $x = 0 \ \Rightarrow \ f''(0) = -\frac{\pi^2}{81} Cos\left(\frac{\pi}{9}\right) < 0 \Rightarrow \ Hay\ un\ máximo\ en\ ese\ punto$
- Si $x = 9 \ \Rightarrow f''(9) = -\frac{\pi^2}{81} Cos(\pi) > 0 \ \Rightarrow Hay\ un\ mínimo\ en\ ese\ punto$

Podemos comprobar que tanto atendiendo a los valores de $f(x)$, $\{1,3\} \in [0,3]$ como los valores de $x, \{0,9\} \in [0,12]$ la curva en todo el intervalo está contenida dentro del muro.

b)

Área total del muro: $3 \times 12 \ = \ 36\ m^2$

Área bajo la curva f(x), que denominaremos como A_{bajo}, se realiza simplemente por medio de la integral definida en la longitud del muro:

$$A_{bajo} \ = \int_0^{12} [cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2]\ dx \ = \left[\frac{9}{\pi} Sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x\right]_0^{12} = -\frac{9}{\pi} Sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 24 - 0 = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\ u^2$$

Para calcular el área sobre la curva se puede calcular restando al área total del muro el área bajo la curva:

$$A_{sobre} = 36 - \left(24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\right) = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}\ u^2 \approx 14{,}48\ m^2$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

c)

Aproximando el valor del área bajo la curva $24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21{,}52\ m^2$ repartiendo esto en divisiones de $3m^2$, puesto que cada bote cubre esa cantidad de área, se obtiene que son necesarios:

$$\frac{21{,}52}{3} = 7{,}17 \approx 8\ botes$$

Son necesarios 8 botes para cubrir la totalidad del área bajo la curva y sobrará parte del último bote de spray.

BLOQUE 3 (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1

Dada la recta:
$\boldsymbol{r}: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$
y el plano $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x + 2y - 3z = 1}$

Se pide:
a) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.
b) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.
c) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es √14.

Solución

a)

Lo primero que debemos hacer es extraer información de la recta r y del plano π, pasaremos la recta a su ecuación paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Punto P en r: (1, 0, 2)
Vector director de r: $\overrightarrow{v_r} = (2, 0, 1)$
Normal del plano π: $\overrightarrow{n_\pi} = (1, 2, -3)$

Un buscamos un plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano π, esto implica que dos vectores pertenecientes a este nuevo plano, que llamaremos α, serán justamente el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}$ y el normal al plano del enunciado $\overrightarrow{n_\pi}$. Por lo tanto, un vector perpendicular a α será:

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{n_\pi} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2i + 7j + 4k$$

Las coordenadas de este vector son los coeficientes asociados a las variables x, y , z del plano en su ecuación general:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ \rightarrow\ -2x + 7y + 4z + D = 0$$

Para encontrar el valor restante usaremos el punto P = (1, 0, 2) de la recta r ya que según el enunciado este se haya halla contenido en el plano solicitado. Sustituyendo las coordenadas del punto por x, y z:

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

$$-2\cdot 1+7\cdot 0+4\cdot 2+D=0\rightarrow \quad D=-6$$

Con ello, el plano buscado es π: $-2x+\ 7y+\ 4z-\ 6\ =\ 0$

b)

Buscamos una recta S contenida en π que corta perpendicularmente a r. Para ello, primero evaluaremos la posición relativa entre plano π y la recta r, para ello bastará hacer el producto escalar entre el vector normal del plano y el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{n_\pi}\cdot\vec{r}=(2,0,1)(1,2,-3)=-1$$

Dado que el producto escalar no se anula se comprueba que la recta r y el plano π son perpendiculares. Una vez se ha considerado esto, para encontrar el vector director de la nueva recta S bastará considerar el producto vectorial entre r y el vector normal al plano π pues este producto dará un vector perpendicular a ambos vectores que estará contenido dentro del plano. Así:

$$\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{n_\pi}=(-2,7,4)$$

Dado que esta recta está contenida en el plano π, las rectas r y s se deben cortar justo en el punto donde r corta al plano. De esta forma nos aseguramos que ambas rectas sean secantes. Para encontrar este punto basta con sustituir en la ecuación general del plano las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r\equiv\begin{cases}\mathrm{x}\ =\ 1\ +\ 2\mathrm{t}\\ y=0\\ z=2+t\end{cases}$$

$$\pi: x\ +\ 2y\ -\ 3z\ =\ 1$$

$$(1+2t)+0-3(2+t)=1\ \ \Rightarrow\ \ 1+2t-6-3t=1\ \ \Rightarrow\ \ -5-t=1\ \ \Rightarrow\ \ t=-6$$

Sustituyendo el valor del parámetro t calculado en la ecuación de la recta r nos permitirá conocer el punto de corte de r y π:

$$r\equiv\begin{cases}\mathrm{x}\ =\ 1\ +\ 2(-6)\\ y=0\\ z=2-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{x}\ =\ -11\\ y=0\\ z=-4\end{cases}$$

Tomando el vector director de la recta s calculado previamente y el punto de corte de $r\ y\ \pi$, la ecuación de la recta s descrita en paramétricas queda como:

$$s\equiv r\equiv\begin{cases}\mathrm{x}\ =\ -11-2\mathrm{u}\\ y=7u\\ z=-4+4u\end{cases}\qquad u\in\mathbb{Z}$$

c)

Para determinar el punto o puntos de la recta a una distancia de $\sqrt{14}$ del plano podemos utilizar la distancia de un punto a un plano. Para ello podemos tomar un punto genérico de r (sus ecuaciones paramétricas escritas como coordenadas de un punto):

Punto general de r: $(x_0,y_0,z_0)=(1\ +\ 2t,0,2\ +\ t)$

Distancia al plano $d(r,\pi)=\frac{|x_0+2y_0-3z_0-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{|1+2t+0-3(2+t)-1|}{\sqrt{14}}$

Buscamos que la distancia sea $\sqrt{14}$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

$$\frac{|1+2t+0-3(2+t)-1|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14} \Rightarrow |1+2t-6-3t-1|=14$$

$$|-6-t|=14 \Rightarrow \begin{cases} -6-t=14 & \Rightarrow \quad t=-20 \\ 6+t=14 & \Rightarrow \quad t=8 \end{cases}$$

Sustituyendo ambos valores de t en las ecuaciones paramétricas de r obtenemos los puntos a dicha distancia de $\sqrt{14}$

$$Si\ t=-20 \quad el\ punto\ es\ (x_0,y_0,z_0)=(-39,0,-18)$$

$$Si\ t=8 \quad el\ punto\ es\ (x_0,y_0,z_0)=(17,0,10)$$

Pregunta 3.2

Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi: x+y=2$. Se pide:
a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.
b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Solución

a)

La ecuación del plano es: $x+y-2=0$, con vector normal $\overrightarrow{n_\pi}=(1,1,0)$. Usamos la formula de distancia de un punto a un plano, siendo (x_0,y_0,z_0) las coordenadas del punto que sustituimos en las variables de la ecuación general del plano:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+D|}{|\overrightarrow{n_{pl}}|}=\frac{|0+1+0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

b)

Buscamos el punto que es directamente la proyección ortogonal de P sobre el plano π. Podemos usar la formula o encontrarlo de forma geométrica, para ello primero calculamos el punto de una recta perpendicular al plano que pasa por P y calculamos su intersección con el plano. Esto se puede hacer partiendo de la idea de que esta recta auxiliar pasa por P y al ser perpendicular al plano podemos tomar como vector director el vector normal al plano $\overrightarrow{n_\pi}=(1,1,0)$

$$S\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1 \end{cases} \quad \lambda\in\mathbb{Z}$$

Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación general del plano obtenemos el valor que debe tener λ para poder calcular el punto de intersección:

$$\lambda+1+\lambda-2=0 \Rightarrow \quad \lambda=\frac{1}{2}$$

De este modo, el punto de intersección es $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}1\right)$ que es justamente el punto Q solicitado.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

c)

El plano x + y = 2 corta los ejes en:
A=corte eje X: (2, 0, 0)
B= corte eje Y: (0, 2, 0)

P = (0, 1, 1)

El área del triángulo se puede calcular a través del modulo del producto vectorial de dos vectores creados con estos puntos (los vectores que definen dos lados del triángulo) a través de la formula:

$$A_{triángulo} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{2}$$

Calculamos estos vectores:
PA = (2, -1, -1), PB = (0, 1, -1)

Calculamos el producto vectorial: $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2i + 2j + 2k$

Módulo $|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$

Sustituyendo en la ecuación mostrada arriba:

$$A_{triángulo} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}\, u^2$$

BLOQUE 4 (Calificación máxima 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Problema 4.1:

Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ y P una medida de probabilidad en E definida por $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y el resto de sucesos elementales equiprobables. Se consideran los sucesos $A = \{7,\ 11,\ 13,\ 19\}$, $B = \{2,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17\}$, $C = \{3, 5, 7, 11,\ 13\}$. Se pide calcular:

c) $P\left((\overline{A - C}) \cap B\right)$
d) $P\left((A \cap B) | \overline{C}\right)$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es determinar la probabilidad de cada suceso, tanto simple como compuesto. Tenemos que $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y el resto de sucesos del espacio muestral son equiprobables. Dado que sabemos que se debe cumplir:

$$P(E) = 1$$

Esto implica que $P(2) + P(3) + P(5) + P(7) + P(11) + P(13) + P(17) + P(19) = 1$

Dado que conocemos que salvo el 3 y el 7 son equiprobables, es decir

$$P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19) = P$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Podemos transformar la expresión de arriba en una ecuación que nos permite encontrar la probabilidad del resto de sucesos, basta sustituir P(3) y P(7) por su valor y el resto de probabilidades por P, así:

$$6P + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \ P = \frac{1}{12}$$

De esta forma podemos calcular las probabilidades, una forma de hacerlo sería calcular P(A), P(B) y P(C). Otra forma, la que haremos aquí por ser más corta y visual, es simplemente usar operaciones entre conjuntos.

a)

$$(\overline{A - C}) = \big(E - (A - C)\big) = \{2,3,5,7,11,13,17,19\} - (\{7,\ 11,\ 13,\ 19\} - \{3,5,7,11,\ 13\}) =$$

$$= \{2,3,5,7,11,13,17,19\} - \{19\} = \{2,3,5,7,11,13,17\}$$

Así:

$$(\overline{A - C}) \cap B = \{2,3,5,7,11,13,17\} \cap \{2,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17\} = \{2,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17\}$$

Finalmente:

$$P\big((\overline{A - C}) \cap B\big) = P(\{2,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17\}) = P(2) + P(5) + P(7) + P(13) + P(17) =$$

$$= 4P + \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

b) Repetimos procedimiento, esta vez para:

$$P\big((A \cap B)\big|\bar{C}\big) = \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$$

Así tenemos:

$$\bar{C} = E - C = \{2,3,5,7,11,13,17,19\} - \{3,5,7,11,\ 13\} = \{2,17,19\}$$

$$A \cap B \cap \bar{C} = \{7,\ 11,\ 13,\ 19\} \cap \{2,\ 5,\ 7,\ 13,\ 17\} \cap \{2,17,19\} = \emptyset$$

Como vemos, son conjuntos disjuntos, por lo que su probabilidad condicionada será:

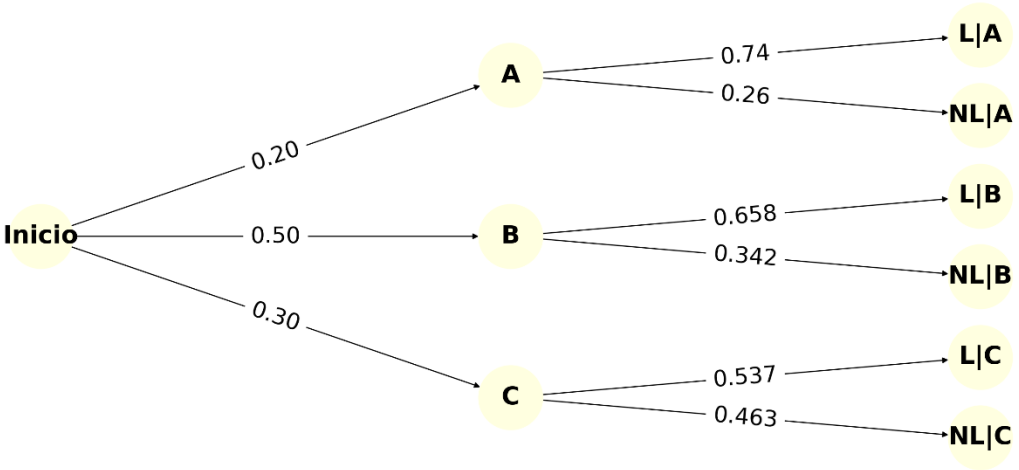
$$P\big((A \cap B)\big|\bar{C}\big) = \frac{P(A \cap B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0}{P(\bar{C})} = 0$$

Problema 4.2

Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65,8% entre los de 25 a 64 y al 53,7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES



Hemos llamado A al grupo de ciudadanos entre 14 y 24 años, B al segun grupo de 25 a 64 años y C al conjunto de ciudadanos mayores de 65 años. Así mismo, L representa aquellos que son lectores habituales y NL a aquellos que no lo son. Nótese que en la segunda parte del árbol hemos puesto la condicionada para que os quede claro lo que representan esas probabilidades.

a) En este caso basta con sumar todos los caminos en los que hay lectores habituales. Es decir empleando el teorema de probabilidad total:

$$P_t(L) = P(A)P(L|A) + P(B)P(L|B) + P(C)P(L|C) = 0{,}2 \cdot 0{,}74 + 0{,}50 \cdot 0{,}658 + 0{,}30 \cdot 0{,}537 = 0{,}6381$$

b) En este caso habrá que aplicar el teorema de Bayes pues:

$$P(B|NL) = \frac{P(B)P(NL|B)}{P(NL)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}342}{1 - 0{,}6381} = 0{,}4725$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES