Instrucciones generales

Dispone de 90 minutos para realizar el examen.

No está permitido el uso de calculadora alguna. Tampoco está permitido el uso de ordenadores, tablets, teléfonos, reloj inteligente, ni ningún tipo de material electrónico o aparatos de comunicación.

No está permitido el uso de ningún material adicional.

El examen debe completarse con tinta azul o negra.

No se permite el uso de típex ni de ningún otro tipo de líquido o cinta correctores.

Durante la prueba, solo se permite la comunicación con el profesorado encargado. Cualquier otra interacción, así como el uso de dispositivos o recursos no autorizados, supondrá la retirada inmediata de la prueba, que será registrada como intento de copia no válida.

Solo puede utilizarse el papel facilitado por el tribunal o equipo responsable. Las hojas de respuesta deben numerarse en las casillas inferiores habilitadas a tal efecto.

Los ejercicios siempre deben contestarse en español.

Criterios de Evaluación

La prueba se compone de tres bloques, con un total de 10 puntos:

PRIMER BLOQUE. PROBLEMAS DE DESARROLLO CON OPTATIVIDAD.

Consta de dos problemas con un valor máximo de 2.5 puntos. La calificación máxima de esta parte es de 5 puntos. En cada problema se debe contestar solamente una opción. Redacte cada problema en hojas separadas. En caso de que se hagan dos opciones de un mismo problema solo se calificará la primera entregada.

SEGUNDO BLOQUE. PREGUNTAS TIPO TEST.

La calificación máxima de esta parte es de 2.5 puntos. Debe contestar a un máximo de 5 preguntas de las 8 posibles. En este caso de contestar más, solo se tendrán en cuenta las 5 primeras. Cada pregunta correcta suma 0.5 puntos, mientras que cada pregunta incorrecta resta 0.2 puntos. Las preguntas sin contestar o con doble marca no suman ni restan puntos. Las preguntas deben contestarse realizando una marca adecuada en la hoja de respuestas que se adjunta.

TERCER BLOQUE. PROBLEMA DE TIPO COMPETENCIAL.

La calificación máxima de esta parte es de 2.5 puntos. Hay un solo problema del que se deben responder todas las preguntas.

.

PRIMER BLOQUE

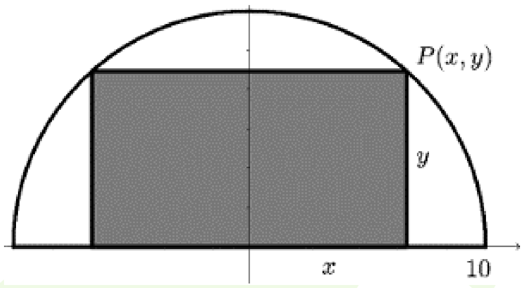
1- Elija solo una de las opciones siguientes

a) Dada la función f(x):

$$f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$$

Realice un estudio de la función y esboce su gráfica, debe indicar el dominio, simetría, continuidad, asíntotas, intervalos de crecimiento, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión.

b) En un jardín con forma de semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.



2- Elija solo una de las dos opciones siguientes

a) Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cruz, al lanzarla, es el triple de la de obtener cara.

1- (0.5 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

2- (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

3- (0.5 puntos) Halle la probabilidad de que al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

4-(0.75 puntos) Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

b) Una compañía farmacéutica estudia un medicamento que mejora la calidad de vida de los pacientes con esclerosis aliviando sus síntomas en un 80% de los casos según el promedio de los últimos resultados. Se ha detectado también, que si un paciente es tratado con placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10% por efectos de sugestión. Se realiza de nuevo un estudio experimental donde la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

1- Determinar cuál es la probabilidad de que los síntomas de un paciente elegido al azar hayan mejorado.

2- Si un paciente elegido al azar ha notado una mejoría hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

3- Calcular las probabilidades anteriores para un estudio con el mismo medicamento y el mismo placebo, con la diferencia de que en el nuevo estudio se suministra el medicamento al 75% de los pacientes, en lugar de a la mitad.

SEGUNDO BLOQUE

1. **Sean los planos $\pi_1: 3x - y + z + 2 = 0$ y $\pi_2: 3x + y - z + 2 = 0$ su posición relativa es:**

   a) Secantes

   b) Coincidentes

   c) Ninguna de las anteriores

2. **Dado el polinomio**

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

   a- No se pueden calcular sus raíces.

   b- Tiene como raíces $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$.

   c- Ninguna de las anteriores.

3- **Dadas dos matrices $A\ y\ B$ se cumple que una es la inversa de la otra, entonces:**

   a) $Ran(A) \geq Ran(B)$

   b) El determinante de ambas solo puede ser +1 o -1

   c) Ninguna de las anteriores.

4- **La recta tangente a una función f(x) en el punto x=5 tiene la forma $5x + 3y = 0$**

   a) La función es creciente en x=5.

   b) La función alcanza un extremo relativo en x=5.

   c) Ninguna de las anteriores.

5- **Para todo par de vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ que forman un ángulo de $45°$, o lo que es lo mismo, $\frac{\pi}{4}\ rad$.**

   a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left||\vec{u} \times \vec{v}|\right|$

   b) $Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2}$

   c) Ninguna de las anteriores

6- Dada la matriz $\begin{pmatrix} t & t & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a- Tiene inversa si $t = 0$ o $t = 1$

b- No tiene inversa si $t = 0, t = 1$, o $t = -1$

c- Ninguna de las anteriores

7- Sea una función f(x) continua en el intervalo $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$ tal que $f(0) = f(2)$, entonces:

a) Podemos afirmar que f(x) alcanza un máximo o un mínimo en $[0,2]$

b) No podemos afirmar que f(x) alcanza un máximo o un mínimo en $[0,2]$

c) Ninguna de las anteriores

8- Dados dos sucesos A y B tal que $P(A) = 0,6$ $\;P(A \cap \overline{B}) = 0,3$ y $P(\overline{A} \cap B) = 0,2$

a) Son complementarios

b) Son independientes

c) Ninguna de las anteriores

TERCER BLOQUE

La nave SOYUZ-M23 se envió para el rescate de tres astronautas ubicados en la ISS. Para poder llevar a cabo el rescate, la compuerta de acoplamiento debe estar alineada con la SOYUZ en todo momento.

a) **La trayectoria de la nave SOYUZ-M23 mientras se dirige hacia la ISS se describe como $r \equiv x = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$, por otro lado, la trayectoria de la ISS es $s \equiv \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$. ¿Deben reconducir la trayectoria de la nave?**

b) **Pasado un tiempo comprueban de nuevo la trayectoria, que ahora se describe como $r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$ ¿Es correcta esta nueva trayectoria? De no ser posible corríjala siguiendo la ecuación de la forma $r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-a}{4}$ otorgando el valor apropiado al parámetro a.**

c) **Finalmente, la nave ha alcanzado a la ISS; sin embargo, deben comprobar si la nave debe inclinarse hasta adoptar una trayectoria alineada con la compuerta, esta trayectoria es $t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{4}$ ¿Cuál es el ángulo con el que deben rotar la nave para alinearse con la compuerta? Expréselo en función del arcoseno si no resulta en un ángulo conocido sin necesidad de calculadora.**

SOLUCIONES

PRIMER BLOQUE

1- Elija solo una de las opciones siguientes

a) Dada la función f(x):

$$\boldsymbol{f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}}$$

Realice un estudio de la función y esboce su gráfica, debe indicar el dominio, simetría, continuidad, asíntotas, intervalos de crecimiento, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión.

DOMINIO: $Dom\big(f(x)\big) = R - \{1\}$

SIMETRÍA: No tiene simetría ya que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$

$$f(-x) = -x - \frac{4}{(-x-1)^2} \qquad -f(x) = -x + \frac{4}{(x-1)^2}$$

CONTINUIDAD: f(x) es continua en su dominio, en x=1 no está definida por lo que no tiene sentido estudiar su continuidad en dicho punto. Sin embargo, es posible que tenga asíntotas verticales al acercarnos a esa región.

ASÍNTOTAS VERTICALES:

$$lim_{x\to1^-}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2}\right) = \left(1 - \frac{4}{(1^- - 1)^2}\right) = 1 - \frac{4}{(0^-)^2} = 1 - \frac{4}{0^+} = 1 - \infty = -\infty$$

$$Lim_{x\to1^+}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2}\right) = \left(1 - \frac{4}{(1^+ - 1)^2}\right) = 1 - \frac{4}{(0^+)^2} = 1 - \frac{4}{0^+} = 1 - \infty = -\infty$$

Existe asíntota vertical en $x = 1$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES:

$$Lim_{x\to\pm\infty}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2}\right) = Lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2}\right) = Lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3 - 2x^2 + x - 4}{(x-1)^2}\right) = \pm\infty$$

No hay asíntotas verticales, por lo que debemos comprobar si existen asíntotas oblicuas.

ASÍNTOTAS OBLICUAS:

$$m = Lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = Lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x - \frac{4}{(x-1)^2}}{x}\right) = Lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x} - \frac{4}{x(x-1)^2}\right) = 1 - \frac{4}{\pm\infty} = 1$$

$$n = lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = Lim_{x\to\pm\infty}\left(x - \frac{4}{(x-1)^2} - x\right) = Lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4}{(x-1)^2}\right) = \frac{4}{\pm\infty} = 0$$

Existe asíntota oblicua en $y = x$

MONOTONÍA Y EXTREMOS

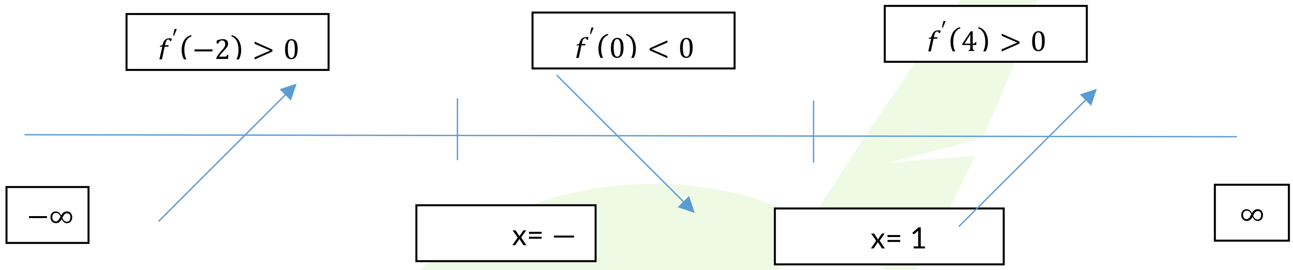
Calculamos la derivada de f(x)

$$f'(x) = 1 - 4 \cdot \frac{(-2)(x-1)}{((x-1)^2)^2} = 1 + \frac{8(x-1)}{(x-1)^4} = 1 + \frac{8}{(x-1)^3}$$

Como vemos, el dominio de f'(x) coincide con el de f(x), por lo que la función es derivable en todo su dominio. Ahora igualamos la derivada a cero para extraer candidatos a máximos y a mínimos:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{8}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow -8 = (x-1)^3 \Rightarrow -2 = x - 1 \Rightarrow x = -1$$

Luego nuestro candidato a extremo relativo (máximo o mínimo) es x=-1. Colocamos en una recta las asíntotas verticales y los candidatos a extremos relativos para estudiar la monotonía:



Por lo tanto, la función:

Crece en: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

Decrece en: $(-1,1)$

Tiene un máximo en $\big(-1, f(-1)\big) = (-1,-2)$

CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN:

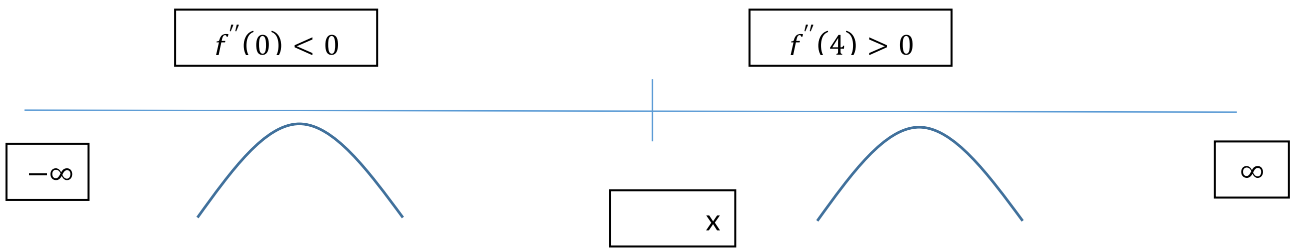
Tomamos la segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{24}{(x-1)^4}$$

Al igualar la segunda derivada a cero encontramos los posibles puntos de inflexión, en este caso no hay:

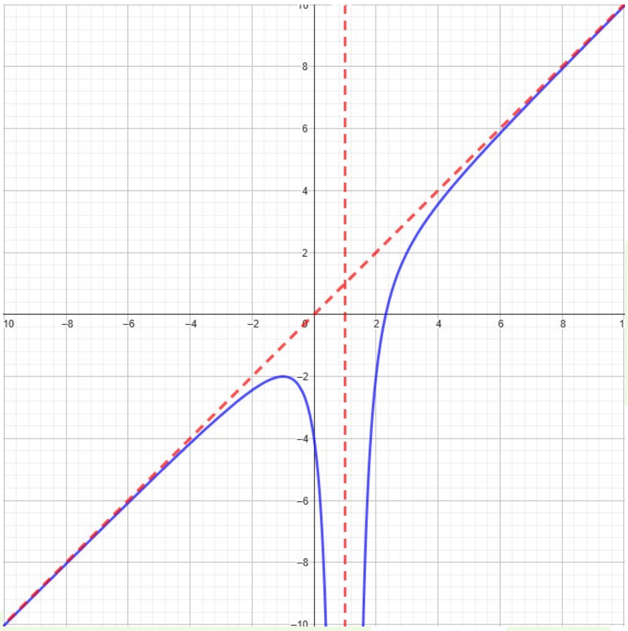
$$f''(x) = 0 \leftrightarrow \quad -\frac{24}{(x-1)^4} = 0 \quad \rightarrow \quad 24 = 0 \quad \textit{Esto no tiene sentido}, \nexists\ \textit{Ptos. inflexión}$$

Aunque no existan puntos de inflexión, el hecho de que haya una asíntota vertical puede provocar cambios en la curvatura, por ello se comprobará:

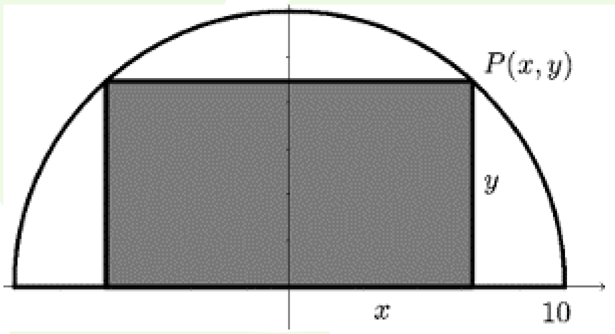


Por lo tanto, obtenemos que la función es cóncava (∩) en todo su dominio

La gráfica de la función, en azul, con sus asíntotas en rojo es:



b) En un jardín con forma de semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima.



Podemos aprovechar la simetría del problema y partir a la mitad el parterre. De esta forma, el área se puede calcular partiendo de la altura "y" y la mitad de la base "x" como:

$$A_{parterre} = 2xy$$

Dado que esta ecuación tiene más de una variable, vamos a aprovechar que nos dan el radio de la semicircunferencia para poder relacionar ambas variables por medio de Pitágoras. Así, si el radio es de 10 m entonces por Pitágoras se debe cumplir:

$$10^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{100 - x^2}$$

Sustituyendo esta variable en el área obtenemos nuestra función a optimizar:

$$A_{parterre} = 2x\sqrt{100 - x^2}$$

Encontramos los posibles máximos o mínimos igualando la derivada a cero:

$$A'_{parterre} = 2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \rightarrow 2\sqrt{100 - x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$2(100 - x^2) = 2x^2 \quad \rightarrow \quad 200 - 2x^2 = 2x^2 \rightarrow 200 = 4x^2 \rightarrow x = \sqrt{50}\, m$$

En este caso el extremo relativo estará en $x = \sqrt{50}$. Comprobamos que es un máximo ya que $A'(0) > 0$ y $A'(60) < 0$, de modo que las dimensiones del parterre para que su superficie sea máxima serán:

$$Base\ del\ parterre = 2x = 2\sqrt{50}\, metros$$

$$Altura\ del\ parterre = y = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - \left(\sqrt{50}\right)^2} = \sqrt{50}\, m$$

2- Elija solo una de las dos opciones siguientes

a) Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cruz, al lanzarla, es el triple de la de obtener cara.

1- (0.5 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

Sabemos por propiedades de la probabilidad que P(Cruz)+P(Cara)=1 ya que ambos sucesos conforman todo el espacio muestral. Además, por el enunciado P(Cruz)=3P(Cara) de este modo:

$$\begin{cases} P(Cruz) + P(Cara) = 1 \\ P(Cruz) = 3P(Cara) \end{cases} \Rightarrow \ P(Cruz) = \frac{3}{4} \ \ \& \ \ P(Cara) = \frac{1}{4}$$

2- (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

Dado que no importa el orden recurrimos a la probabilidad total:

$$P(Cara \cap Cruz)_{Total} = P(Cara)P(Cruz|Cara) + P(Cruz)P(Cara|Cruz) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

3- (0.5 puntos)Halle la probabilidad de que al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

Recurrimos a la distribución binomial $P(Cara \geq 1) = 1 - P(Cara = 0) = 1 - \binom{2}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

4- (0.75 puntos)Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

La probabilidad de que obtengamos 2 caras habiendo obtenido al menos una cara se puede calcular a partir de una probabilidad condicionada haciendo uso del teorema de Bayes y considerando que ambos sucesos son independientes:

$$P(2\ Caras|1\ Cara) = \frac{P(Cara_{1º\ Lanzamiento} \cap Cara_{2º\ Lanzamiento})}{P(Al\ menos\ una\ cara)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{1}{7}$$

b) Una compañía farmacéutica estudia un medicamento que mejora la calidad de vida de los pacientes con esclerosis aliviando sus síntomas en un 80% de los casos según el promedio de los últimos resultados. Se ha detectado también, que si un paciente es tratado con placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10% por efectos de sugestión. Se realiza de nuevo un estudio experimental donde la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

En primer lugar, conviene reescribir los datos. Como se administra el medicamento a la mitad de los pacientes y con el placebo a la otra mitad, la probabilidad de que a una persona elegida al azar se le haya suministrado cada tratamiento será 1/2:

$$P(Medicamento) \equiv P(Medic.) = \frac{1}{2}, \qquad P(Placebo) \equiv P(Plac.) = \frac{1}{2}.$$

Además, el 80% de los pacientes tratados con medicamento mejoran (y, por tanto, el otro 20% no mejora), por lo que:

$$P(Mej.|Medic.) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, \qquad P(No\ Mej.|Medic.) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

Análogamente, el 10% de los pacientes tratados con placebo mejoran (luego el otro 90% no mejora) y:

$$P(Mej.|Plac.) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}, \qquad P(No\ Mej.|Plac.) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}.$$

1- **Determinar cuál es la probabilidad de que los síntomas de un paciente elegido al azar hayan mejorado.**

Si un paciente ha mejorado pueden haber ocurrido dos cosas: o bien al paciente se le administró el medicamento y después mejoró o bien fue tratado con placebo y mejoró. Por tanto, la probabilidad total de elegir un paciente que haya mejorado es la suma de la probabilidad de elegir un paciente al que le haya ocurrido lo primero (medicamento + mejoría) y la probabilidad de lo segundo (placebo + mejoría):

$$P(Mej.) = P(Medic.)P(Mej.|Medic.) + P(Plac.)P(Mej.|Plac.) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{9}{20}.$$

2- **Si un paciente elegido al azar ha notado una mejoría hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.**

Nos están pidiendo la probabilidad condicionada $P(Medic.|Mej.)$. En este caso es más fácil calcular la otra probabilidad condicionada, $P(Mej.|Medic.)$, que de hecho es uno de los datos del enunciado. Entonces, una manera sencilla de calcular la probabilidad buscada es a través de la fórmula de Bayes:

$$P(Medic.|Mej.) = \frac{P(Medic.)P(Mej.|Medic.)}{P(Mej.)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{8}{9}.$$

3- Calcular las probabilidades anteriores para un estudio con el mismo medicamento y el mismo placebo, con la diferencia de que en el nuevo estudio se suministra el medicamento al 75% de los pacientes, en lugar de a la mitad.

En este caso los cálculos son los mismos, pero cambian las probabilidades de que la persona elegida al azar haya sido tratada con medicamento o con placebo. Ahora tenemos

$$P(Medic.) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, \qquad P(Plac.) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

El resto de probabilidades ($P(Mej.|Medic.), P(No\ Mej.|Medic.)$, etc.) no cambian, ya que el medicamento y el placebo son los mismos, de manera que su efecto sobre los pacientes será el mismo independientemente de la proporción de pacientes tratados con cada método. Entonces hay que hacer exactamente los mismos cálculos que en los apartados anteriores para estas nuevas proporciones:

$$P(Mej.) = P(Medic.)P(Mej.|Medic.) + P(Plac.)P(Mej.|Plac.) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8};$$

$$P(Medic.|Mej.) = \frac{P(Medic.)P(Mej.|Medic.)}{P(Mej.)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{5}{8}} = \frac{24}{25}.$$

SEGUNDO BLOQUE

1. Sean los planos $\pi_1: 3x - y + z + 2 = 0$ y $\pi_2: 3x + y - z + 2 = 0$ su posición relativa es:

a) Secantes

b) Coincidentes

c) Ninguna de las anteriores

2. Dado el polinomio

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

a- No tiene raíces reales.

b- Tiene como raíces $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$.

c- Ninguna de las anteriores.

3- Dadas dos matrices A y B se cumple que una es la inversa de la otra, entonces:

a) $Ran(A) \geq Ran(B)$

b) El determinante de ambas solo puede ser +1 o -1

c) Ninguna de las anteriores.

4- La recta tangente a una función f(x) en el punto x=5 tiene la forma $5x + 3y = 0$

a) La función es creciente en x=5.

b) La función alcanza un extremo relativo en x=5.

c) Ninguna de las anteriores.

5- Para todo par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que forman un ángulo de $45°$, o lo que es lo mismo, $\frac{\pi}{4}$ rad.

a) $Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2}$

b) Ninguna de las anteriores

6- Dada la matriz $\begin{pmatrix} t & t & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a- Tiene inversa si $t = 0$ o $t = 1$

b- No tiene inversa si t=0, t=1, o t=−1

c- Ninguna de las anteriores

7- Sea una función f(x) continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$ tal que $f(0) = f(2)$, entonces:

a) Podemos afirmar que f(x) alcanza un máximo o un mínimo en [0,2]

b) No podemos afirmar que f(x) alcanza un máximo o un mínimo en [0,2]

c) Ninguna de las anteriores

8- Dados dos sucesos A y B tal que $P(A) = 0,6$, $P(A \cap \overline{B}) = 0,3$ y $P(\overline{A} \cap B) = 0,2$

a) Son complementarios

b) Son independientes

c) Ninguna de las anteriores

TERCER BLOQUE

La nave SOYUZ-M23 se envió para el rescate de tres astronautas ubicados en la ISS. Para poder llevar a cabo el rescate, la compuerta de acoplamiento debe estar alineada con la SOYUZ en todo momento.

a) **La trayectoria de la nave SOYUZ-M23 mientras se dirige hacia la ISS se describe como $r \equiv x = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$, por otro lado, la trayectoria de la ISS es $s \equiv \begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ 2x+3y-2z-3=0 \end{cases}$. ¿Deben reconducir la trayectoria de la nave?**

Vamos a estudiar la posición relativa de la nave, respecto de la trayectoria de la ISS, ya que si ambas trayectorias no se cortan no habrá un punto en el que ambas estructuras puedan coincidir para poder realizar el rescate. Como únicamente queremos comprobar si ambas trayectorias coincidirán en un punto basta con comprobar si las ecuaciones paramétricas de la recta r cumplen las ecuaciones de la recta s:

Escribamos las rectas r en su versión paramétrica

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

Comprobemos si r corta a s en algún punto sustituyendo x, y, z de la recta s por las coordenadas de la recta r:

$$\begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ 2x+3y-2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda-3+2\lambda-4\lambda-1=0 \\ 2\lambda-9+6\lambda-8\lambda-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4=0 \quad ¡Ojo! \\ -12=0 \quad ¡Ojo! \end{cases}$$

Como no hemos encontrado valor alguno para el parámetro λ la recta r y la recta s no se cortan en ningún punto. Por lo que sí debe reconducir su trayectoria.

b) **Pasado un tiempo comprueban de nuevo la trayectoria, que ahora se describe como $r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{4}$ ¿Es correcta esta nueva trayectoria? De no ser posible corríjala siguiendo la ecuación de la forma $r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-a}{4}$ otorgando el valor apropiado al parámetro a.**

Igual que en el apartado anterior, estudiamos la posición relativa de las dos trayectorias. Las nuevas ecuaciones paramétricas de r son

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

Buscamos otra vez el punto de corte entre r y s:

$$\begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ 2x+3y-2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+2\lambda-4\lambda-1=0 \\ -9+6\lambda-8\lambda-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda-4=0 \\ -2\lambda-12=0 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtendríamos $\lambda = -2$ y de la segunda $\lambda = -6$, de manera que tampoco existe solución: las trayectorias siguen sin cortarse. Corrigiendo la trayectoria como se dice en el enunciado, hacemos lo mismo para buscar el valor de a que hace que las trayectorias se corten:

$$\begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ 2x+3y-2z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3+2\lambda-a-4\lambda-1=0 \\ -9+6\lambda-2a-8\lambda-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda-a-4=0 \\ -2\lambda-2a-12=0 \end{cases}$$

Tenemos ahora que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si a la primera ecuación le restamos la segunda, se tiene:

$$a + 8 = 0,$$

Es decir, $a = -8$. De esta forma, sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones, se obtiene $\lambda = 2$, aunque este resultado no es necesario. La solución completa sería que la trayectoria correcta es aquella dada por la recta

$$r \equiv \frac{x}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+8}{4}.$$

c) Finalmente, la nave ha alcanzado a la ISS; sin embargo, deben comprobar si la nave debe inclinarse hasta adoptar una trayectoria alineada con la compuerta, esta trayectoria es $t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{4}$ ¿Cuál es el ángulo con el que deben rotar la nave para alinearse con la compuerta?

El ángulo que forman la compuerta y la nave es el ángulo que debemos girar la nave para que se alinee con la compuerta. Este ángulo lo podemos obtener a partir del producto escalar de los vectores directores de cada recta. Estos son:

$$\vec{v}_n = (0,2,4), \qquad \vec{v}_c = (1,2,4),$$

donde $\vec{v}_n$ es el vector director de la trayectoria de la nave y $\vec{v}_c$ es el de la trayectoria de la compuerta (ISS). Por un lado, si el ángulo que forman es α, el producto escalar vendrá dado por

$$\vec{v}_n \cdot \vec{v}_c = \left|\left|\vec{v}_n\right|\right| \cdot \left|\left|\vec{v}_c\right|\right| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{2^2+4^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+4^2} \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{20} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos(\alpha).$$

Por otro lado, podemos calcular directamente el producto escalar:

$$\vec{v}_n \cdot \vec{v}_c = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 20.$$

Igualando los dos resultados:

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos(\alpha) = 20; \qquad \cos(\alpha) = \frac{20}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{20}{21}}.$$

Por tanto, el ángulo que habría que rotar la nave para alinearse con la compuerta es

$$\alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{20}{21}}\right).$$