INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

En la Comunidad Autónoma de Aragón se encuentra la única Denominación de Origen Protegida (DOP) de melocotón, el Melocotón de Calanda, que celebró su 26° aniversario en 2025. El Departamento de Agricultura de Aragón registró comercialmente para la DOP tres variedades tradicionales de este producto, Jesca, Calante y Evaisa. La DOP exige unas características que deben cumplir sus frutos en cuanto a su aspecto, coloración, calibre, dureza, contenido en azúcar, etc.

1.a) (1 punto) La información recogida durante estos años permite indicar que el peso de los melocotones de la variedad Jesca puede ser aproximado por una distribución normal con desviación típica 50 gramos. Determine el número mínimo de melocotones que sería necesario seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar el peso medio de los melocotones de esta variedad de manera que, con un nivel de confianza del 96, 8 %, el margen de error en la estimación no supere los 15 gramos.

1.b) (1,5 puntos) Durante los dos últimos meses de crecimiento, los melocotones de la DOP Melocotón de Calanda permanecen embolsados uno a uno en el propio árbol mediante bolsas protectoras que garantizan su pureza y evitan el contacto con productos fitosanitarios. Se calcula que en la última campaña se embolsaron unos 250 millones de melocotones. Pese a ello, las tormentas de verano con granizo pueden dañar un 5 % de los frutos. En una cooperativa de las empresas certificadas se reciben melocotones para su comercialización como DOP y se inspecciona una muestra aleatoria simple de 400 melocotones. Obtenga el número esperado de melocotones no dañados y calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 375 melocotones no estén dañados.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1,5 puntos) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

2.1.b) (1 punto) Calcule, si es posible, la matriz D tal que:

$$D^t = \frac{B^t\, B}{|B\, B^t|}$$

Nota: para cualquier matriz M, M^t indica su matriz traspuesta.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Pregunta 2.2

El azafrán ecológico es una especia culinaria muy apreciada y costosa. Una empresa lo envasa y comercializa en distintos formatos: sobres de papel reciclado, cajas de plástico y cajas de metal. Cada uno de ellos se envasa en una línea de envasado diferente. Se sabe que el total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal. Por otra parte, el contenido de un sobre de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal. Además, si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases. Indique cuántos gramos de azafrán contiene cada uno de los envases en que puede comercializarse el azafrán.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Dada la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{3-x} & \text{si } x < 1, \\[2ex] \dfrac{2-x}{3+x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

3.1.a) (1,3 puntos) Estudie la continuidad de f(x) en el punto x = 1 y determine sus asíntotas.

3.1.b) (1,2 puntos) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $g(x) = (3x^2 + 9x)f(x)$, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 3.

Pregunta 3.2

Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{2x^2-3x}{a}$ donde a > 0 es un parámetro real.

3.2.a) (1,2 puntos) Determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

3.2.b) (1,3 puntos) Determine el valor de a para que la función f(x) tenga una primitiva, F(x), que verifique $F(0) = 2$ y $F(3) = 7$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

De dos sucesos A y B se sabe que $P(B) = 0,5, P(A|B) = 0,2 \ y \ P(A \cup B) = 0,8$.

4.1.a) (0,8 puntos) Obtenga la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

4.1.b) (0,7 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A.

4.1.c) (1 punto) Justifique razonadamente si los sucesos A y B son independientes.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Pregunta 4.2

En una comunidad de vecinos se ha realizado una votación para analizar la conveniencia de instalar placas solares como medida de ahorro energético. El 26 % de los propietarios votaron en blanco y el resto se repartieron por igual entre los favorables a esta medida y los que votaron en contra. Un 10 % de los que votaron en blanco son propietarios que tienen la vivienda alquilada. Entre los propietarios favorables a esta medida, un 18 % también la tienen alquilada y sólo un 5 % la tienen alquilada entre los propietarios que votaron en contra. Como no hay voluntarios, el presidente de la Comunidad para el próximo año se elegirá por sorteo entre los propietarios de todas las viviendas.

4.2.a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el futuro presidente de la comunidad de vecinos tenga la vivienda alquilada?

4.2.b) (1,5 puntos) Una vez realizado el sorteo, se comprueba que el nuevo presidente no tiene su vivienda alquilada. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera a favor de la instalación de placas solares en la votación realizada?

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

En la Comunidad Autónoma de Aragón se encuentra la única Denominación de Origen Protegida (DOP) de melocotón, el Melocotón de Calanda, que celebró su 26° aniversario en 2025. El Departamento de Agricultura de Aragón registró comercialmente para la DOP tres variedades tradicionales de este producto, Jesca, Calante y Evaisa. La DOP exige unas características que deben cumplir sus frutos en cuanto a su aspecto, coloración, calibre, dureza, contenido en azúcar, etc.

1.a) (1 punto) La información recogida durante estos años permite indicar que el peso de los melocotones de la variedad Jesca puede ser aproximado por una distribución normal con desviación típica 50 gramos. Determine el número mínimo de melocotones que sería necesario seleccionar en una muestra aleatoria simple para estimar el peso medio de los melocotones de esta variedad de manera que, con un nivel de confianza del 96, 8 %, el margen de error en la estimación no supere los 15 gramos.

Sea $X = "Peso\ de\ un\ melocoton\ de\ Calanda\ de\ la\ variedad\ Jesca"$

Confianza del 96,8% → $\alpha = 1 - 0{,}968 = 0{,}032$. Por lo que $\frac{\alpha}{2} = 0{,}016$ y debemos buscar z tal que $P(Z < z) < 1 - 0{,}016 = 0{,}984$. Consultamos la tabla de la distribución normal y vemos que $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}145$.

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 15 \rightarrow n \geq \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} * \sigma}{15}\right)^2 = \left(\frac{2{,}145 * 50}{15}\right)^2 = 51{,}1225$$

Como mínimo habría que seleccionar 52 melocotones en la muestra.

1.b) (1,5 puntos) Durante los dos últimos meses de crecimiento, los melocotones de la DOP Melocotón de Calanda permanecen embolsados uno a uno en el propio árbol mediante bolsas protectoras que garantizan su pureza y evitan el contacto con productos fitosanitarios. Se calcula que en la última campaña se embolsaron unos 250 millones de melocotones. Pese a ello, las tormentas de verano con granizo pueden dañar un 5 % de los frutos. En una cooperativa de las empresas certificadas se reciben melocotones para su comercialización como DOP y se inspecciona una muestra aleatoria simple de 400 melocotones. Obtenga el número esperado de melocotones no dañados y calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 375 melocotones no estén dañados.

Definimos $Y = numero\ de\ melocotones\ no\ dañados\ entre\ los\ 400$

$$Y \sim B(n = 400; p = 0{,}95)$$

El número esperado de melocotones no dañados entre los 400 es:

$$E(Y) = np = 400 * 0{,}95 = 380\ melocotones$$

La probabilidad pedida es $P(Y \geq 375)$. La variable aleatoria Y tiene media igual a 380 y desviación típica igual a 4,36 ($\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{380 * 0{,}95 * 0{,}05} = 4{,}36$). Ya que n > 30, np > 5 y nq > 5, se puede aproximar Y por una distribución normal N (380; 4,36). Utilizando la corrección de Yates y la correspondiente tipificación, se obtiene:

$$P(Y \geq 375) \approx P\left(Z \geq \frac{374{,}5 - 380}{4{,}36}\right) = P(Z \geq -1{,}26) = P(Z \leq 1{,}26) = 0{,}8962 \rightarrow 89{,}62\%$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.a) (1,5 puntos) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

Como $(I + 2C^t)^{-1} = A \Longrightarrow A^{-1} = I + 2C^t \Longrightarrow \frac{1}{2}(A^{-1} - I)^t = C$

Por cualquiera de los métodos, debemos llegar a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} - I = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (A^{-1} - I)^t = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.b) (1 punto) Calcule, si es posible, la matriz D tal que:

$$D^t = \frac{B^t\, B}{|B\, B^t|}$$

Nota: para cualquier matriz M, M^t indica su matriz traspuesta.

$$B^t B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3); \qquad |B\,B^t| = 3$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = D$$

Pregunta 2.2

El azafrán ecológico es una especia culinaria muy apreciada y costosa. Una empresa lo envasa y comercializa en distintos formatos: sobres de papel reciclado, cajas de plástico y cajas de metal. Cada uno de ellos se envasa en una línea de envasado diferente. Se sabe que el total del azafrán pendiente de envasar a última hora de un día determinado se podría distribuir bien en 15 sobres de papel y 4 cajas de plástico, o bien en 4 cajas de plástico y 3 cajas de metal. Por otra parte, el contenido de un sobre de papel más el de una caja de plástico es 5 gramos inferior que el de una caja de metal. Además, si al total del contenido de 5 cajas de plástico se le añade un gramo más de azafrán, se dobla la capacidad conjunta de los otros dos envases. Indique cuántos gramos de azafrán contiene cada uno de los envases en que puede comercializarse el azafrán.

Se definen x = "gramos de azafrán en un sobre de papel", y = "gramos de azafrán en una caja de plástico" y z = "gramos de azafrán en una caja de metal".

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

$$\begin{cases} 15x + 4y = 4y + 3z \\ x + y = z - 5 \\ 5y + 1 = 2(x+z) \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} 15x - 3z = 0 \\ x + y - z = -5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{array}$$

Resolviendo el sistema por Gauss o Cramer se obtiene $x = 3, y = 7, z = 15$

Vamos a resolverlo por Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to F_3 = 2F_2 + F_3 \to \begin{pmatrix} 15 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & -4 & -11 \end{pmatrix} \to F_2 = F_1 - 15F_2$$

$$\to \begin{pmatrix} 15 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 12 & 75 \\ 0 & 7 & -4 & -11 \end{pmatrix} \to F_3 = 7F_2 + 15F_3 \to \begin{pmatrix} 15 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -15 & 12 & 75 \\ 0 & 0 & 24 & 360 \end{pmatrix}$$

De la última fila: $24z = 360 \to z = \frac{360}{24} = 15$

De la segunda fila: $-15y + 12z = 75 \to y = \frac{75-12z}{-15} = \frac{75-12*15}{-15} = 7$

De la primera fila: $15x - 3z = 0 \to x = \frac{3z}{15} = 3 * \frac{15}{15} = 3$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Dada la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{3-x} & \text{si } x < 1, \\ \\ \dfrac{2-x}{3+x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

3.1.a) (1,3 puntos) Estudie la continuidad de f(x) en el punto x = 1 y determine sus asíntotas.

<u>Continuidad</u>

La función será continua en $x = 1$ si cumple: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2-x}{3+x} = \frac{1}{4} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{3-x} = 0.$$

La función no es continua en $x = 1$.

<u>Asíntotas</u>

Para $x < 1$, el denominador se anula en $x = 3$, mientras que para $x \geq 1$, el denominador se anula en $x = -3$. Por lo tanto, la función no tiene asíntotas verticales ya que $dom\ f(x) = \mathbb{R}$

Para las posibles asíntotas horizontales, calculamos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{3-x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2-x}{3+x} = -1$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Por lo tanto, la función presenta una asíntota horizontal en $y = -1$.

La función no tiene asíntota oblicua al tener asíntota horizontal.

3.1.b) (1,2 puntos) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función $g(x) = (3x^2 + 9x)f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

$$g(x) = 3x(x+3)\frac{2-x}{3+x} = 3x(2-x) = 6x - 3x^2$$

Dicha función corta al eje de abscisas en $x = 0$ y $x = 2$. Luego el área comprendida entre dicha función, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$ es:

$$Área = \int_1^2 (6x - 3x^2)dx + \int_2^3 (6x - 3x^2)dx = 6u^2$$

Pregunta 3.2

Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{a}$ donde a > 0 es un parámetro real.

3.2.a) (1,2 puntos) Determine los cortes con los ejes de coordenadas, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

<u>Puntos de corte</u>

Corta al eje de ordenadas cuando $x = 0 \to y = 0$

Corta al eje de abscisas cuando $y = 0 \to x = 0; x = 3/2$

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento</u>

$$f'(x) = 0 \to f'(x) = \frac{4x - 3}{a} \to 4x - 3 = 0 \to x = \frac{3}{4}$$

Cogemos dos valores, uno menor y otro mayor que 3/4, y sustituimos en la derivada.

$$f'(0) < 0 \to decreciente\ en\ \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$$
$$f'(1) > 0 \to creciente\ en\ \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$$

3.2.b) (1,3 puntos) Determine el valor de a para que la función f(x) tenga una primitiva, F(x), que verifique $F(0) = 2$ y $F(3) = 7$.

La primitiva es:

$$F(x) = \int \frac{2x^2 - 3x}{a} dx = \frac{1}{a}\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right) + C$$

$$F(0) = C = 2$$

$$F(3) = \frac{1}{a}\left(\frac{2 * 3^3}{3} - \frac{3 * 3^2}{2}\right) + 2 = 7 \to a = \frac{9}{10}$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

De dos sucesos A y B se sabe que $\boldsymbol{P(B) = 0,5, P(A|B) = 0,2}$ y $\boldsymbol{P(A \cup B) = 0,8}$.

4.1.a) (0,8 puntos) Obtenga la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}20$$

4.1.b) (0,7 puntos) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso B pero no el suceso A.

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}40$$

Para calcular $P(A \cap B)$ utilizamos el dato del enunciado $P(A|B) = 0,2$

Sabiendo que $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) * P(B) = 0{,}2 * 0{,}5 = 0{,}1$

4.1.c) (1 punto) Justifique razonadamente si los sucesos A y B son independientes.

$$P(A) * P(B) = 0{,}4 * 0{,}5 = 0{,}20 \neq P(A \cap B) = 0{,}10$$

Por lo que los sucesos A y B no son independientes.

Pregunta 4.2

En una comunidad de vecinos se ha realizado una votación para analizar la conveniencia de instalar placas solares como medida de ahorro energético. El 26 % de los propietarios votaron en blanco y el resto se repartieron por igual entre los favorables a esta medida y los que votaron en contra. Un 10 % de los que votaron en blanco son propietarios que tienen la vivienda alquilada. Entre los propietarios favorables a esta medida, un 18 % también la tienen alquilada y sólo un 5 % la tienen alquilada entre los propietarios que votaron en contra. Como no hay voluntarios, el presidente de la Comunidad para el próximo año se elegirá por sorteo entre los propietarios de todas las viviendas.

Se definen los sucesos A1 = "Votar en blanco", A2 = "Votar a favor de la medida", A3 = "Votar en contra de la medida" y Q = "Tener la vivienda alquilada".

$$P(A1) = 0{,}26 \quad P(A2) = P(A3) = 0{,}37$$

$$P(Q/A1) = 0{,}10 \quad P(Q/A2) = 0{,}18 \quad P(Q/A3) = 0{,}05$$

4.2.a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que el futuro presidente de la comunidad de vecinos tenga la vivienda alquilada?

$$P(Q) = P(Q \mid A1)P(A1) + P(Q \mid A2)P(A2) + P(Q \mid A3)P(A3) =$$
$$= 0,10 \cdot 0,26 + 0,18 \cdot 0,37 + 0,05 \cdot 0,37 = 0,1111$$

La probabilidad es del 11,11%

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

4.2.b) (1,5 puntos) Una vez realizado el sorteo, se comprueba que el nuevo presidente no tiene su vivienda alquilada. ¿Cuál es la probabilidad de que estuviera a favor de la instalación de placas solares en la votación realizada?

$$P(A2 \mid \bar{Q}) = \frac{P(A2 \cap \bar{Q})}{P(\bar{Q})} = \frac{0,82 \cdot 0,37}{0,8889} = 0,3413$$

La probabilidad es del 34,13%

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES