INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos. DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos). Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social Rettiwt se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso "El P25 necesita enfriarse para poder usarlo".

Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber @solo_reviews ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso. Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de @solo_reviews, se asume que esta es una muestra aleatoria simple. Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en Rettiwt:

En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2 % de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata. #PearSupport #P25

1.a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de @solo_reviews hubiese sido superior o igual a 11.

1.b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99 % de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de @solo_reviews. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ (a+1)x + az = 5 \end{cases}$$

2.1.a) (1,25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

2.1.b) (1,25 puntos) Resuelva el sistema para a = 2.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

Pregunta 2.2

Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, \quad y \geq 0, \quad -x + y \leq 8, \quad x + 4y \leq 12, \quad x + y \leq 6.$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real $f(x) = x(x^2 + a)$, donde a es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de f(x), F(x), cumpla que F (0) = 0 y F (1) = 1.

3.1.b) (0,5 puntos) Para a = 3/2, obtenga el área del recinto delimitado por f(x), el eje horizontal y las rectas verticales x = 0 y x = 2.

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto x = 1 sea 1.

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de f(x).

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de f(x) en x = 0.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de f(x).

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0{,}4, \quad P(\overline{B}) = 0{,}7,$$
$$P(C) = 0{,}5, \quad P(A \cap B \mid C) = 0{,}2$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\overline{B}$ ocurran simultáneamente.

4.1.c) (1 punto) Obtenga P (C | A ∩ B).

Pregunta 4.2

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- **El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5 %.**
- **Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90 % de las veces.**
- **Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10 % de las veces.**

4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.

4.2.b) (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1 (2,5 puntos). Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social Rettiwt se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso "El P25 necesita enfriarse para poder usarlo".

Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber @solo_reviews ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso. Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de @solo_reviews, se asume que esta es una muestra aleatoria simple. Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en Rettiwt:

En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2 % de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata. #PearSupport #P25

1.a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de @solo_reviews hubiese sido superior o igual a 11.

La variable aleatoria Y = "Número de smartphones con sobrecalentamiento en el hilo de @solo_reviews" es una B(n=288; p=0,02). Se solicita P (Y≥11). Como np>5 y nq>5, se puede aproximar Y a una $N(\mu = np = 5{,}76; \sigma = \sqrt{npq} = 2{,}38)$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P(Y \geq 11) \approx P\left(Z \geq \frac{11 - \mu - 0{,}5}{\sigma}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}228 \rightarrow 2{,}28\%$$

La probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados sea igual o mayor a 11 es de un 2,28%.

1.b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99 % de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de @solo_reviews. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

Se tiene que n = 288, $\hat{p}$ = 20/288 = 0,0694, α = 0,01 y $z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 2,575. El intervalo de confianza al 99% para la proporción de smartphones defectuosos es:

$$IC = (\hat{p} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (0{,}0694 \pm 2{,}575 * \sqrt{\frac{0{,}0694 * (1 - 0{,}0694)}{288}} = (0{,}0694 \pm 0{,}0386)$$

$$IC = (0{,}0308; 0{,}1080)$$

La proporción 2 % que afirma Pearl en su comunicado no está contenida en el intervalo de confianza al 99 %, por lo que su veracidad es cuestionable teniendo en cuenta que la confianza del intervalo para la proporción desconocida es del 99 %.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ (a+1)x+az=5 \end{cases}$$

2.1.a) (1,25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

La matriz del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & a & 5 \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0.

$$|A|=-a+2=0 \rightarrow a=2$$

- $Si\ a\neq 2 \rightarrow |A|\neq 0 \rightarrow rango\ A=3; rango\ A^*=3; nº\ incógnitas=3 \rightarrow SCD$
- $Si\ a=2 \rightarrow |A|=0 \rightarrow calculamos\ determinante\ de\ orden\ 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rango\ A=2$$

$$Calculamos\ los\ posibles\ determinantes\ 3x3\ para\ calcular\ el\ rango\ de\ A^*$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rango\ A^*=2$$

$$Rango\ A=rango\ A^*<nºincógnitas \rightarrow SCI$$

Por tanto,

Si a = 2 → Sistema Compatible Determinado (SCD)

Si a ≠ 2 → Sistema Compatible Indeterminado (SCI)

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

2.1.b) (1,25 puntos) Resuelva el sistema para a = 2.

Para a = 2 era un sistema compatible indeterminado, por lo que solamente se puede resolver por Gauss. Haremos 0 los elementos marcados en rojo mediante transformaciones de las filas de la matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow F3 = 3F1 - F3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F2 = 2F1 - F2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como la segunda y tercera filas son iguales, podemos quitar una de ellas. La matriz queda de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema de ecuaciones resultante es $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$

Como tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, debemos cambiar una de las incógnitas por una variable y resolver las otras dos incógnitas en función de dicha variable.

$$z = \lambda$$

$$Sustituyendo\ en\ la\ segunda\ ecuación \rightarrow 3y + z = 1 \rightarrow 3y + \lambda = 1 \rightarrow y = \frac{1 - \lambda}{3}$$

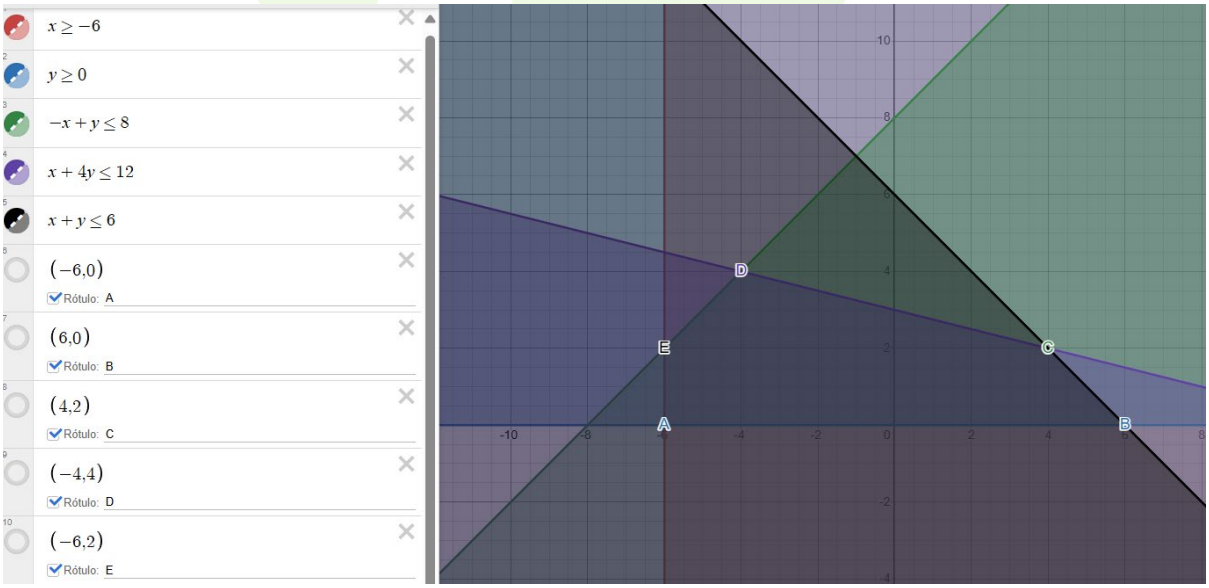
$$Sustituyendo\ en\ la\ primera\ ecuación \rightarrow x + y + z = 1 \rightarrow x + \frac{1 - \lambda}{3} + \lambda = 1 \rightarrow x = \frac{5 - 2\lambda}{3}$$

Pregunta 2.2

Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6, \quad y \geq 0, \quad -x + y \leq 8, \quad x + 4y \leq 12, \quad x + y \leq 6.$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.



© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

La función objetivo a maximizar es $f(x,y) = 2y - 3x$, que toma los siguientes valores en los vértices de S.

Vértice	$A(-6,0)$	$B(-6,2)$	$C(-4,4)$	$D(4,2)$	$E(6,0)$
$f(x,y)$	18	22	20	-8	-18

El valor máximo es 22 y se encuentra en el punto (-6,2).

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real $f(x) = x(x^2 + a)$, donde a es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de f(x), F(x), cumpla que F (0) = 0 y F (1) = 1.

Las primitivas de $f(x) = x^3 + ax$ son:

$$F(x) = \int x^3 + ax\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + C$$

F(0) = 0 → C = 0

F (1) = 1 → a = 3/2

3.1.b) (0,5 puntos) Para a = 3/2, obtenga el área del recinto delimitado por f(x), el eje horizontal y las rectas verticales x = 0 y x = 2.

Si a = 3/2 → $f(x) = x^3 + \frac{3x}{2}$

Para calcular el área entre dos puntos, necesitamos calcular una integral definida entre esos puntos.

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} \rightarrow F(2) - F(0) = \left(\frac{2^4}{4} + \frac{3(2^2)}{4}\right) - 0 = \frac{16}{4} + \frac{12}{4} = 4 + 3 = 7u^2$$

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto x = 1 sea 1.

La pendiente de la recta tangente a f(x) en x = 1 es $f'(1)$.

$$f'(x) = 3x^2 + a \rightarrow f'(1) = 3 + a = 1 \rightarrow a = -2$$

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de f(x).

El dominio de una función son los valores de x donde existe dicha función. Al ser funciones racionales, tenemos que analizar los puntos donde se anula el denominador y ver si pertenecen a cada trozo de la función.

$$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow no\ pertenece\ a\ x < 0$$
$$x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow solo\ pertenece\ x = 3\ al\ trozo\ x \geq 0$$

Por lo tanto: $Domf(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de f(x) en x = 0.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = 0$$

$$f(0) = 0$$

Como ambos limites existen y son iguales e iguales a la función en x=0, la función es continua.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de f(x).

Asíntota vertical → puntos de no dominio

$$\lim_{x \to 3} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = \infty \rightarrow Asíntota\ vertical: x = 3$$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2x - 1} = \frac{1}{2} \rightarrow Asíntota\ horizontal: y = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} = \infty$$

Asíntota oblicua:

Como el trozo $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ $tiene\ asíntota\ horizontal, no\ tiene\ asíntota\ oblicua$

Vamos a comprobar si $f(x) = \frac{4x^3+x^2}{x^2-9}$ tiene asíntota oblicua de la forma y = mx + n.

$$m \rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^3 - 9x} = 4$$

$$n \rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} - 4x = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + x^2 - 4x^3 + 36x}{x^2 - 9} = 1$$

$$Asíntota\ oblicua: y = 4x + 1$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0{,}4, \quad P(\overline{B}) = 0{,}7,$$
$$P(C) = 0{,}5, \quad P(A \cap B \mid C) = 0{,}2$$

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) * P(B) = 1 - 0{,}4 * 0{,}3 = 0{,}88$$

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\overline{B}$ ocurran simultáneamente.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}4 * 0{,}3 = 0{,}28$$

4.1.c) (1 punto) Obtenga P (C | A ∩ B).

$$P(C/A \cap B) = \frac{P(A \cap B/C)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A \cap B/C) * P(C)}{P(A) * P(B)} = \frac{0{,}2 * 0{,}5}{0{,}4 * 0{,}3} = \frac{0{,}1}{0{,}12} = 0{,}08333 \ldots$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES