INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo.

El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

1.a) (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?

1.b) (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender? Justifique si dichas cantidades serían únicas.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1}, & x \leq 0 \\ \dfrac{x+a}{x+1}, & x > 0 \end{cases}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 0$.
2.1.b) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión: $f(x) = e^x(-x^2+3)$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifique, si procede, sus extremos relativos.
2.2.b) (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x}\,dx$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Para poder participar en el concurso "Mejor Jabón Artesano del año" es necesario pasar un control de calidad muy exigente.

Pregunta 3.1

Un maestro jabonero sabe que el 90 % de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problemas este control de calidad.

3.1.a) (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5%.

3.1.b) (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

Pregunta 3.2

El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gramos y desviación típica 30 gramos.

3.2.a) (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99% para estimar el peso medio μ de las pastillas de jabón de este artesano.

3.2.b) (1,25 puntos) Si el verdadero valor de μ fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

En un concesionario el 50 % de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35 % híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80% de los eléctricos enchufables, el 60% de los híbridos y el 45% de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar.

4.1.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.

4.1.b) (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

Pregunta 4.2

Dados tres sucesos, A, B y C, se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes, y se tienen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,2$ y $P(B \cap C) = 0,05$.

4.2.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B.
4.2.b) (1 punto) Calcule $P(\overline{B} \cup \overline{C})$.
4.2.c) (0,5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C?

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo.

El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

1.a) (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?

RESOLUCIÓN

Este ejercicio se trataría de la resolución de un sistema de ecuaciones. Primeramente, se deben definir cuáles son las variables del problema:

$$x = sandía\ verde\ rayada, y = sandía\ negra\ sin\ pepitas,\ z = sandía\ negra\ con\ pepitas$$

En base a esta información, se pueden definir las ecuaciones del sistema:

"[…] capacidad (de) 2700 kilos […] Las sandías que vende son de tres variedades […]":

$$x + y + z = 2700$$

"[…] La sandía rayada […] la venderá a 1,25 euros el kilo. […] la sandía negra sin pepitas […]2,75 euros el kilo y […]con pepitas de 2,25 euros el kilo. […] debe recaudar de la venta 5400 euros […]":

$$1{,}25x + 2{,}75y + 2{,}25z = 5400$$

"[…] el número de kilos de sandía negra con pepitas (debe ser) un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas […]":

$$z = \frac{1}{3} \cdot (x + y) \rightarrow -x - y + 3z = 0 \rightarrow x + y - 3z = 0$$

Así las cosas, el sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 2700 \\ 1{,}25x + 2{,}75y + 2{,}25z = 5400 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

En base a esto, puede resolverse el sistema de ecuaciones. Para su resolución, se va a aplicar el método de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 2700 \\ 1{,}25x + 2{,}75y + 2{,}25z = 5400 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 1{,}25 & 2{,}75 & 2{,}25 & 5400 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

i. Cálculo del determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1{,}25 & 2{,}75 & 2{,}25 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2{,}75 & 2{,}25 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1{,}25 & 2{,}25 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1{,}25 & 2{,}75 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (-10{,}5) + (-1) \cdot 1 \cdot (-6) + 1 \cdot 1 \cdot (-1{,}5) = -10{,}5 - 6 - 1{,}5 = -6$$

Dado que el determinante es no nulo, puede resolverse el sistema de ecuaciones.

ii. Cálculo de los determinantes de las matrices A_x, A_y y A_z:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2700 & 1 & 1 \\ 5400 & 2{,}75 & 2{,}25 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 2700 & 1 \\ 5400 & 2{,}25 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2700 & 1 \\ 5400 & 2{,}75 \end{vmatrix} = -6750$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2700 & 1 \\ 1{,}25 & 5400 & 2{,}25 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 2700 & 1 \\ 5400 & 2{,}25 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2700 \\ 1{,}25 & 5400 \end{vmatrix} = -5400$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5400 \\ 1{,}25 & 2{,}75 & 2700 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2700 \\ 2{,}75 & 5400 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2700 \\ 1{,}25 & 4500 \end{vmatrix} = -2025$$

NOTA: se ha utilizado como fila pivote la fila 3. Dado que esa fila contiene un 0, no se ha calculado el adjunto en dicho término ya que su resultado final es 0.

iii. Cálculo de x, y y z:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = -\frac{6750}{-6} = 1125$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = -\frac{5400}{-6} = 900$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = -\frac{4050}{-6} = 675$$

CONCLUSIÓN

El frutero deberá comprar 1125 kilos de sandía rayada, 900 kilos de sandía negra sin pepitas, y 675 kilos de sandía negra con pepitas.

1.b) (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender? Justifique si dichas cantidades serían únicas.

RESOLUCIÓN

Para resolver este ejercicio, se debe tener en cuenta que el precio debe ser el mismo para las tres variedades y al mismo tiempo se debe recaudar 5400 euros y vender 2700 kilos.

$$P \cdot (x + y + z) = P \cdot 2700 = 5400$$

Así las cosas, puede plantearse el precio como el cociente entre l recaudación y los kilos vendidos:

$$P = \frac{Euros\ recaudados}{Cantidad\ vendida} = \frac{5400}{2700} = 2\ €/kg$$

Considerando esta información, de las tres ecuaciones que se tenían anteriormente, siguen pudiendo utilizarse $x + y + z = 2700$ y $z = \frac{1}{3} \cdot (x + y)$. Contando con esto, se pueden simplificar las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 2700 \\ z = \frac{1}{3} \cdot (x + y) \end{cases} \rightarrow x + y + \frac{1}{3} \cdot (x + y) = 2700 \rightarrow \frac{4}{3}(x + y) = 2700 \rightarrow x + y = 2025$$

Sustituyendo en $z = \frac{1}{3} \cdot (x + y)$:

$$z = \frac{1}{3} \cdot (x + y) \rightarrow z = \frac{1}{3} \cdot 2025 = 675$$

Se obtiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2025 \\ z = 675 \end{cases}$$

Se tiene el valor de z; pero, sin embargo, sólo hay una ecuación para x e y, por lo que existirán infinitas combinaciones de x e y para poder dar solución al problema.

CONCLUSIÓN

El sistema que se obtendría es un sistema compatible indeterminado.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{f(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}, & x \leq 0 \\ \dfrac{x + a}{x + 1}, & x > 0 \end{cases}, \qquad a \in \mathbb{R}}$$

2.1.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 0$.

RESOLUCIÓN

Para que la función sea continua en $x = 0$, debe forzarse que se cumpla la definición de igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \dfrac{0^2 + 1}{0 - 1} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{0^2 + 1}{0 - 1} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{0 + a}{0 + 1} = a \end{array}\right\} \rightarrow a = -1$$

CONCLUSIÓN

Para que la función sea continua en $x = 0$, el valor del parámetro a deberá ser -1

2.1.b) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

RESOLUCIÓN

En el estudio de las asíntotas, se analizará la existencia de las asíntotas verticales (AV), horizontales (AH) y oblicuas (AO)

Asíntotas Verticales (AV)

Para estudiar las asíntotas verticales, debe analizarse primeramente el dominio de la función. Ambos trozos de función son funciones racionales, por lo que debe estudiarse cuándo el denominador se anula:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$$
$$f(x) = \frac{x+a}{x+1} \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1$$

A priori, podría afirmarse que habría asíntotas verticales en $x=1$ y $x=-1$; sin embargo, es necesario que se tenga en cuenta la condición de x que se impone en cada trozo:

En el trozo de función $\frac{x^2+1}{x-1}$ se impone que $x \leq 0$, y el denominador se anula en $x=1$. Esto implica que el valor $x=1$ quedará fuera del dominio del trozo función.

En cuanto al trozo de función $\frac{x+a}{x+1}$, se impone la condición $x>0$, pero el valor de x que anula al denominador es -1. Así las cosas, en este segundo trozo de función se repite la situación anterior: $x=-1$ se encuentra fuera del dominio impuesto en el trozo de función.

Así las cosas, puede afirmarse que la función no tendrá asíntotas verticales.

Asíntotas Horizontales (AH)

Para estudiar las asíntotas horizontales, debe calcularse hacia qué valor tenderá la función $f(x)$ si x toma un número muy grande y negativo ($-\infty$), y muy grande y positivo ($+\infty$).

Considerando esto, y que el punto de salto se encuentra en $x=0$, esto implicará que sólo se puede calcular una asíntota en cada uno de los trozos de función:

$$Condición: x \leq 0 \rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$$
$$Condición: x > 0 \rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{x+a}{x+1} = 1$$

La función presenta una asíntota horizontal en $y=1$ en el intervalo $(0,+\infty)$. En el intervalo $(-\infty,0]$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas Oblicuas (AO)

Para que estudiar la existencia o no de asíntotas oblicuas, debe suceder que no existan asíntotas horizontales. Esto se cumple en el trozo de función afectado por el intervalo $(-\infty,0]$. Así las cosas, deberá hacerse el estudio considerando el trozo de función $\frac{x^2+1}{x-1}$.

Para calcular las asíntotas oblicuas, debe obtenerse la ecuación de la recta $y=mx+n$, donde los valores de m y de n se calcularán de la siguiente manera:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m\cdot x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

$$y = x+1$$

CONCLUSIÓN

La función no tiene asíntotas verticales, tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ en el intervalo $(0, +\infty)$, y una asíntota oblicua definida por la recta $y = x + 1$, en el intervalo $(-\infty, 0]$.

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión: $\boldsymbol{f(x) = e^x(-x^2+3)}$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifique, si procede, sus extremos relativos.

RESOLUCIÓN

Para poder estudiar la monotonía de la función es necesario conocer, primeramente, el dominio de la misma. La función que se ha dado es $f(x) = e^x(-x^2+3)$. Se trata de un producto de una función exponencial por un polinomio. En ambos casos, el dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$.

Así las cosas, lo que se debe buscar a continuación es la existencia de puntos críticos. Para ello, se deben imponer Condiciones de Primer Orden (despejar x tras calcular $f'(x) = 0$):

$$f(x) = e^x(-x^2+3) \to f'(x) = e^x(-x^2+3) + e^x(-2x) = 0 \to e^x(-x^2-2x+3) = 0 \to \begin{cases} e^x = 0 \\ -x^2-2x+3 = 0 \end{cases}$$

Despeje en $\boldsymbol{e^x = 0}$:

$$e^x = 0 \to \ln(e^x) = \ln(0) \to x\cdot\ln(e) = \ln(0) \to x = \ln(0) = \nexists \to e^x \neq 0$$

Dado que no puede despejarse ningún valor para x, la función e^x sólo tendrá dos posibilidades: que sea siempre creciente, o que sea siempre decreciente. Esto se puede conocer fijándose en el signo que se encuentre a la izquierda de e. En este caso, ese signo es positivo, por lo que será siempre creciente.

Despeje en $\boldsymbol{-x^2-2x+3=0}$:

$$-x^2-2x+3 = 0 \to x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{2\pm 4}{-2} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos en la función, por lo que es necesario estudiar la monotonía en este segundo tramo de función:

Dominio	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,+\infty)$
Valor de x	-4	0	2
Signo de $f'(x)$	< 0	> 0	< 0
Monotonía	Decrece	Crece	Decrece
Extremos relativos		Mínimo	Máximo

CONCLUSIÓN

Es creciente en el intervalo $(-3,1)$ y decreciente en los intervalos $(-\infty,-3)$ y $(1,+\infty)$. Además, presenta un mínimo en $x=-3$, y un máximo en $x=1$.

2.2.b) (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x}dx$$

RESOLUCIÓN

Antes de resolver la integral, debe plantearse cuál es la función con la que se trabajará. Se definirá la siguiente relación $g(x)=\frac{f(x)}{xe^x}$, donde $f(x)=e^x(-x^2+3)$:

$$g(x)=\frac{e^x(-x^2+3)}{xe^x}=\frac{-x^2+3}{x}=\frac{-x^2}{x}+\frac{3}{x}=-x+\frac{3}{x}$$

A continuación, debe comprobarse cuándo la función $g(x)$ se anula:

$$g(x)=0\rightarrow -x+\frac{3}{x}=0\rightarrow x=\frac{3}{x}\rightarrow x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3}\cong\pm 1{,}73$$

La integral está definida en el intervalo $[1,2]$, por lo que, de los dos valores obtenidos, el valor $x=\sqrt{3}$ deberá considerarse en el cálculo de la integral.

Así las cosas, el planteamiento sería el siguiente:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x}dx=\int_1^2\left(-x+\frac{3}{x}\right)dx=\left|\int_1^{\sqrt{3}}\left(-x+\frac{3}{x}\right)dx\right|+\left|\int_{\sqrt{3}}^2\left(-x+\frac{3}{x}\right)dx\right|=$$

$$=\left|\left[-\frac{x^2}{2}+3\ln|x|\right]_1^{\sqrt{3}}\right|+\left|\left[-\frac{x^2}{2}+3\ln|x|\right]_{\sqrt{3}}^2\right|=$$

$$=\left|-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}+3\ln\left|\sqrt{3}\right|-\left(-\frac{(1)^2}{2}+3\ln|1|\right)\right|+\left|-\frac{(2)^2}{2}+3\ln|2|-\left(-\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2}+3\ln\sqrt{3}\right)\right|=$$

$$=\left|-\frac{3}{2}+1{,}65+\frac{1}{2}\right|+\left|-2+2{,}08+\frac{3}{2}-1{,}65\right|=|0{,}65|+|-0{,}07|=0{,}65+0{,}07=0{,}72\ u^2$$

CONCLUSIÓN

El valor de la integral definida es de 0,72 u².

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Para poder participar en el concurso "Mejor Jabón Artesano del año" es necesario pasar un control de calidad muy exigente.

Pregunta 3.1

Un maestro jabonero sabe que el 90 % de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problemas este control de calidad.

3.1.a) (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5%.

RESOLUCIÓN

En el enunciado se pide determinar el tamaño mínimo de la muestra que, asumiendo que la proporción del maestro jabonero sea cierta ($\hat{p} = 0{,}9$), y considerando además una confianza del 95% ($1 - \alpha = 0{,}95$), y un error de estimación inferior al 5% ($E = 0{,}05$).

Dada esta información, puede inferirse que se está trabajando con una distribución binomial, por lo que, para determinar el tamaño de la muestra, deberá despejarse a partir del cálculo del error de estimación en el intervalo de confianza para una distribución binomial:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}$$

De los datos que se deben aplicar, se desconoce el valor de $\hat{q}$ y de $z_{\alpha/2}$.

En cuanto al valor de $\hat{q}$, se puede obtener a partir de $\hat{p}$, como su suceso complementario:

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} \rightarrow \hat{q} = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

En cuanto al valor de $z_{\alpha/2}$, para hallarlo se debe obtener el valor crítico (t) que se ha de consultar en la tabla de la Distribución Normal:

$$t = 1 - \frac{1 - (1 - \alpha)}{2} \rightarrow t = 1 - \frac{1 - 0{,}95}{2} = 0{,}975 \rightarrow Tabla\ de\ la\ Normal \rightarrow z = 1{,}96$$

Ya con esta información, puede obtenerse el valor de n:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \rightarrow n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}05}\right)^2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cong 138{,}29 \cong 139$$

CONCLUSIÓN

Para que, con una confianza del 95%, el error cometido no supere el 5%, y considerando la proporción dada por el maestro jabonero del 90%, el tamaño mínimo de la muestra deberá ser de 139 jabones

3.1.b) (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

RESOLUCIÓN

Dado que se pide calcular la probabilidad mediante la aproximación a una Distribución Normal, es necesario obtener, primeramente, los valores de los parámetros μ y σ que conforman dicha distribución. Esto se puede calcular aplicando las siguientes fórmulas:

$$\mu = n \cdot \hat{p} = 140 \cdot 0{,}9 = 126$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}} = \sqrt{140 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = 3{,}55$$

Contando con estos valores, puede entonces resolverse la probabilidad que se pide. No obstante, debe aplicarse la Corrección de Yates, dado que se ha producido un cambio de distribución:

$$P(X > 120) = P(X' \geq 120{,}5)$$

Sobre esto, ya puede calcularse la probabilidad. Para calcularla, debe aplicarse la tipificación para la variable; y, seguidamente, buscar en la Tabla de la Distribución Normal cuál es la probabilidad asociada a dicho valor:

$$P\left(Z \geq \frac{X' - \mu}{\sigma}\right) \rightarrow P\left(Z \geq \frac{120{,}5 - 126}{3{,}55}\right) = P(Z \geq -1{,}55) = P(Z \leq 1{,}55) = 0{,}9394 = 93{,}94\%$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad es de un 93,94%.

Pregunta 3.2

El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gramos y desviación típica 30 gramos.

3.2.a) (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99% para estimar el peso medio μ de las pastillas de jabón de este artesano.

RESOLUCIÓN

Dado que se indica que los datos se aproximan a una distribución normal, y se pide calcular el intervalo de confianza, es necesario aplicar la siguiente fórmula:

$$IC(\bar{X})_{1-\alpha} = \left(\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor de $\bar{X}$ se puede obtener considerando le peso total (17500 gramos) y el número de pastillas seleccionadas (140):

$$\bar{X} = \frac{17500}{140} = 125$$

En cuanto al valor de $z_{\alpha/2}$, para hallarlo se debe obtener el valor crítico (t) que se ha de consultar en la tabla de la Distribución Normal:

$$t = 1 - \frac{1 - (1 - \alpha)}{2} \rightarrow t = 1 - \frac{1 - 0{,}99}{2} = 0{,}995 \rightarrow Tabla\ de\ la\ Normal \rightarrow z = 2{,}575$$

Con respecto al valor de σ se conoce gracias a que se indica en los propios datos de la distribución. Dado que σ es la desviación típica, y se indica que su valor es 30, se concluye pues:

$$\sigma = 30$$

Finalmente, el valor de n se corresponde con el tamaño de la muestra, siendo en este caso de 140 pastillas de jabón:

$$n = 140$$

Ya con esta información, puede resolverse el intervalo de confianza:

$$IC(\bar{X})_{0,99} = \left(125 \pm 2{,}575 \cdot \frac{30}{\sqrt{140}}\right) = (125 \pm 6{,}53) = (118{,}47; 131{,}53)$$

CONCLUSIÓN

El intervalo de confianza para el peso medio de las pastillas de jabón estará comprendido entre 118,47 gramos y 131,53 gramos, con una confianza del 99%.

3.2.b) (1,25 puntos) Si el verdadero valor de μ fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

RESOLUCIÓN

Dado que se pide calcular la probabilidad del peso medio, puede inferirse que se está pidiendo el cálculo de probabilidades para la media de la variable. Esto se puede obtener mediante la siguiente fórmula:

$$P\left(Z > \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

El valor de $\bar{X}$ debe ser superior 110 ($\bar{X} > 110$). En cuanto a μ, σ y n, se corresponden, respectivamente, con 100 ($\mu = 100$), 30 ($\sigma = 30$) y 64 ($n = 64$). Así pues, el cálculo se desarrollaría de la siguiente manera:

$$P(\bar{X} > 110) = P\left(Z > \frac{110 - 100}{\frac{30}{\sqrt{64}}}\right) = P(Z > 2{,}67) = 1 - P(Z < 2{,}67) = 1 - 0{,}9962 = 0{,}0038 = 0{,}38\%$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que, en una muestra de 64 pastillas de jabón, el peso sea superior inferior a 110 gramos, es de un 0,38%.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

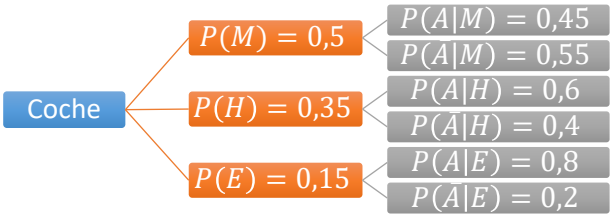
Pregunta 4.1

En un concesionario el 50 % de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35 % híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80% de los eléctricos enchufables, el 60% de los híbridos y el 45% de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar.

Antes de empezar a resolver el ejercicio, es necesario definir los sucesos que conforman el problema:

M = microhíbridos $\quad H$ = híbridos $\quad E$ = enchufables $\quad A$ = acabado más alto

Con esta información, se plantea el árbol de probabilidad:



Con todo esto, puede resolverse el ejercicio.

4.1.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.

RESOLUCIÓN

Dado que se pide calcular la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama, se está pidiendo realmente obtener la probabilidad del suceso $\bar{A}$. Para calcularlo, se recurrirá al Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(\bar{A}) = P(M) \cdot P(\bar{A}|M) + P(H) \cdot P(\bar{A}|H) + P(E) \cdot P(\bar{A}|E) = 0{,}5 \cdot 0{,}55 + 0{,}35 \cdot 0{,}4 + 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}445 \cong 44{,}5\%$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que un coche vendido no tenga el acabado más alto de la gama es de un 44,5%.

4.1.b) (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

RESOLUCIÓN

Dado que se pide calcular la probabilidad de que, sabiendo que ha tenido el acabado más alto de la gama, que sea enchufable, se está pidiendo calcular realmente una probabilidad condicionada. Este cálculo se hará aplicando el Teorema de Bayes:

$$P(E|A) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{P(E) \cdot P(A|E)}{1 - P(\bar{A})} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}8}{1 - 0{,}445} \cong 0{,}1441 \cong 14{,}41\%$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que, si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, sea eléctrico enchufable, es de un 14,41%.

Pregunta 4.2

Dados tres sucesos, A, B y C, se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes, y se tienen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,2$ y $P(B \cap C) = 0,05$.

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario aclarar cómo interpretar que A y C son sucesos disjuntos, y que A y B son independientes.

Que A y C sean sucesos disjuntos quiere decir que son sucesos incompatibles; y, por lo tanto:

$$P(A \cap C) = 0$$

En cuanto a que A y B son independientes, este dato sirve para determinar la probabilidad de la intersección entre ambos sucesos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}25 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$$

Ya con esta información disponible, puede pasarse a resolver el ejercicio.

4.2.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B.

RESOLUCIÓN

Para calcular la probabilidad de que ocurra o A, o B, se está pidiendo realmente calcular la unión de ambos sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}35 = 35\%$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B es de un 35%.

4.2.b) (1 punto) Calcule $P(\bar{B} \cup \bar{C})$.

RESOLUCIÓN

Para calcular la probabilidad del suceso $P(\bar{B} \cup \bar{C})$ se debe recurrir a las Leyes de Morgan:

$$P(\bar{B} \cup \bar{C}) = P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(B \cap C) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 = 95\%$$

CONCLUSIÓN

La probabilidad del suceso $\bar{B} \cup \bar{C}$ es de un 95%.

4.2.c) (0,5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C?

RESOLUCIÓN

Para responder a este apartado, es necesario plantearse la siguiente cuestión: se si sabe que los sucesos A y C son disjuntos (por tanto, $P(A \cap C) = 0$), ¿qué tiene que suceder para que puedan ser además independientes?

Para que dos sucesos sean independientes, deberá cumplirse que, calculando la intersección de ambos sucesos mediante los siguientes dos métodos, se obtenga el mismo resultado en ambos:

i. $P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C)$
ii. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

Asumiendo que se quiera que sean independientes, entonces deberá aplicarse $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$. Considerando esto, y que se sabe que los dos sucesos son incompatibles, puede entonces afirmarse:

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 0$$

Para que esto se cumpla, o bien la probabilidad del suceso A vale 0, o bien la probabilidad del suceso C, vale 0. Se sabe por los datos del enunciado que la probabilidad del suceso A es 0,25. Así las cosas, la única posibilidad es que la probabilidad del suceso C sea 0

CONCLUSIÓN

Para que los sucesos A y C sean independientes, sabiendo que son disjuntos, y que la probabilidad del suceso A es de un 25%, la probabilidad del suceso C deberá ser de un 0%.