INSTRUCCIONES

Material permitido: CALCULADORA BÁSICA, NO científica, NO programable, NO gráfica, NO con acceso a IA
El examen incluye una hoja con la tabla Normal, el alumno puede utilizarla para la resolución de las cuestiones y/o problemas

BLOQUE A.- 2,5 puntos. El alumno debe contestar a UNO de los DOS problemas siguientes. Debe empezar a contestar a continuación de los enunciados y continuar al reverso de esta hoja, puede utilizar hojas adicionales.

A1.- Un padre le da a cada uno de sus hijos 20€. Los niños gastan todo el dinero y compran lo siguiente, el primero compra 5 caramelos, 3 chicles y 3 bombones, el segundo compra 8 caramelos, 3 chicles y 2 bombones, y el tercero compra 7 caramelos, 5 chicles y un bombón.

a) Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema. A continuación, expresa el sistema de ecuaciones en forma matricial.

b) Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones de forma matricial, e indica el coste de cada artículo.

NOTA: Usar Gauss o cálculo matricial en la resolución del problema.

A2.- Dadas las siguiente matrices:

$$A = 77\left[\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \qquad B = 7\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula las matrices A y B

b) Calcula la inversa de la matriz B

c) Calcula la matriz X que verifica XB = A

BLOQUE B.- 2,5 puntos. El alumno debe contestar a UNO de los DOS problemas siguientes. Debe empezar a contestar a continuación de los enunciados y continuar al reverso de esta hoja, puede utilizar hojas adicionales.

B1.- El pasado invierno una granja avícola disponía de una vacuna para proteger a sus animales frente a la gripe aviar. Si un animal se ha vacunado, la probabilidad de que se infecte con el virus es de 0,1; sin la vacuna, dicha probabilidad es de 0,3. El 40% de las aves se vacunó.

a) Halla la probabilidad de que un ave elegida al azar se infecte con el virus.

b) Si el ave elegida al azar se ha infectado con el virus ¿cuál es la probabilidad de que esté vacunada?

c) Si el ave elegida al azar no está infectada con el virus, ¿cuál es la probabilidad de que no esté vacunada?

B2.- La edad a la que se independizan los jóvenes en los paises nórdicos es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 4 años. Para estimar la media se elige aleatoriamente una muestra de 100 jóvenes de dicha población.

a) ¿Cuál es la varianza de la distribución muestral?

b) Si la media muestral es 24 años, halla un intervalo de confianza al 90 % para la media poblacional.

c) ¿Cuál es el error cometido?

BLOQUE C.- 2,5 puntos. El alumno debe contestar a CINCO de las OCHO cuestiones siguientes.

1.- El resultado de hacer B x A es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 7 \\ 7 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

a) No es posible hacer B x A

b) La matriz nula

c) Ninguna de las otras

2.- Sabiendo que el producto de A x B es C, ¿cuál es el valor de x?

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -7 \\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ x \\ 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) x = -7

b) x = 7

c) Ninguna de las otras

3.- La función $f(x) = \frac{-7x}{x+7}$ tiene:

a) Asíntota horizontal y = -7

b) Asíntota vertical x = 7

c) Ninguna de las otras

4.- La función $f(x) = \frac{-7x^2}{x+7}$ tiene un máximo en el punto:

a) x = -14

b) x = 14

c) Ninguna de las otras

5.- Calcular $\int \left(-\frac{7}{x^2} - \frac{7}{x}\right) dx$

a) $\frac{7}{x} + 7\ln(x) + C$

b) $-\frac{7}{x} - \ln(x) + C$

c) Ninguna de las otras

6.- Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, la afirmación siguiente es correcta:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

a) Si A y B son sucesos distintos

b) Si A y B son sucesos independientes

c) Ninguna de las otras

7.- ¿Cuál es el área total bajo la curva de la distribución normal?

a) 100

b) Depende de los valores de la media y la desviación típica

c) Ninguna de las otras

8.- ¿Qué ocurre con el intervalo de confianza si aumenta el valor de la desviación típica poblacional σ ?

a) Se vuelve más estrecho

b) Se mantiene igual

c) Ninguna de las otras

BLOQUE D.- 2,5 puntos. El alumno debe contestar al problema siguiente. Debe empezar a contestar a continuación del enunciado y continuar al reverso de esta hoja, puede utilizar hojas adicionales.

D1.- Disponemos de 36 metros de valla para cerrar un jardín rectangular. Se pide:

a) La función objetivo y la restricción correspondiente.

b) ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima?

SOLUCIÓN

BLOQUE A.- 2,5 puntos. El alumno debe contestar a UNO de los DOS problemas siguientes. Debe empezar a contestar a continuación de los enunciados y continuar al reverso de esta hoja, puede utilizar hojas adicionales.

A1.- Un padre le da a cada uno de sus hijos 20€. Los niños gastan todo el dinero y compran lo siguiente, el primero compra 5 caramelos, 3 chicles y 3 bombones, el segundo compra 8 caramelos, 3 chicles y 2 bombones, y el tercero compra 7 caramelos, 5 chicles y un bombón.

a) Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema. A continuación, expresa el sistema de ecuaciones en forma matricial.

$$x \rightarrow caramelos$$
$$y \rightarrow chicles$$
$$z \rightarrow bombones$$

$$5x + 3y + 3z = 20$$
$$8x + 3y + 2z = 20$$
$$7x + 5x + z = 20$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

La matriz de los coeficientes es la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, nos piden calcular A^{-1}

$$\boxed{A^{-1} = \frac{(AdjA)^t}{|A|}}$$

Paso 1: calcular la matriz Adj A, que está formado por los menores complementarios, que se obtienen tachando fila y columna del elemento correspondiente, obteniendo una matriz con 9 determinantes 2x2. Después se cambia de signo aquellos elementos que cuya suma de fila y columna sea impar.

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 19 \\ 12 & -16 & -4 \\ -3 & 14 & -9 \end{pmatrix}$$

Paso 2: trasponer la matriz Adj A

$$(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -3 \\ 6 & -16 & 14 \\ 19 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

Paso 3: calcular el determinante de la matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 40$$

Paso 4: calcular la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|} = \frac{1}{40}\begin{pmatrix} -7 & 12 & -3 \\ 6 & -16 & 14 \\ 19 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

c) Resuelve el sistema de ecuaciones de forma matricial, e indica el coste de cada artículo.

NOTA: Usar Gauss o cálculo matricial en la resolución del problema.

Gauss

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & | & 20 \\ 8 & 3 & 2 & | & 20 \\ 7 & 5 & 1 & | & 20 \end{pmatrix} \to F_3 = 7F_1 - 5F_3 \to \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & | & 20 \\ 8 & 3 & 2 & | & 20 \\ 0 & -4 & 16 & | & 40 \end{pmatrix} \to F_2 = 8F_1 - 5F_2 \to \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & | & 20 \\ 0 & 9 & 14 & | & 60 \\ 0 & -4 & 16 & | & 40 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = 4F_2 + 9F_3 \to \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & | & 20 \\ 0 & 9 & 14 & | & 60 \\ 0 & 0 & 200 & | & 600 \end{pmatrix}$$

$$De\ la\ última\ fila \to 200z = 600 \to z = 3$$
$$De\ la\ segunda\ fila \to 9y + 14z = 60 \to y = \frac{60 - 14 * 3}{9} = 2$$
$$De\ la\ primera\ fila \to 5x + 3y + 3z = 20 \to x = \frac{20 - 3 * 2 - 3 * 3}{5} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Precio\ caramelos = 1€ \\ Precio\ chicles = 2€ \\ Precio\ bombones = 3€ \end{array}}$$

Cálculo matricial (Cramer)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 3 & 3 \\ 20 & 3 & 2 \\ 20 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{40}{40} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 20 & 3 \\ 8 & 20 & 2 \\ 7 & 20 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{80}{40} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 20 \\ 8 & 3 & 20 \\ 7 & 5 & 20 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{120}{40} = 3$$

A2.- Dadas las siguiente matrices:

$$\boldsymbol{A = 77\left[\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]} \qquad \boldsymbol{B = 7\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

a) Calcula las matrices A y B

$$A = 77\left[\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\right] = 77\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -539 & 539 \\ 539 & -539 \end{pmatrix}$$

$$B = 7\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 49 \\ 0 & 98 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la inversa de la matriz B

$$\boxed{B^{-1} = \frac{(Adj\ B)^t}{|B|}}$$

Paso 1: calcular la matriz Adj B, que está formado por los menores complementarios, que se obtienen tachando fila y columna del elemento correspondiente. Después se cambia de signo la diagonal secundaria, ya que estamos ante una matriz 2x2.

$$Adj\ B = \begin{pmatrix} 98 & 0 \\ -49 & 49 \end{pmatrix}$$

Paso 2: trasponer la matriz Adj B

$$(Adj\ B)^t = \begin{pmatrix} 98 & -49 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$$

Paso 3: calcular el determinante de la matriz B

$$|B| = \begin{vmatrix} 49 & 49 \\ 0 & 98 \end{vmatrix} = 4.802$$

Paso 4: calcular la inversa de B

$$B^{-1} = \frac{(Adj\ B)^t}{|B|} = \frac{1}{4.802}\begin{pmatrix} 98 & -49 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/49 & -1/98 \\ 0 & 1/98 \end{pmatrix}$$

c) Calcula la matriz X que verifica XB = A

En toda ecuación matricial el objetivo es despejar X con las propiedades de las matrices.

$$X * B * B^{-1} = A * B^{-1}$$
$$X * I = A * B^{-1}$$
$$X = A * B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -539 & 539 \\ 539 & -539 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/49 & -1/98 \\ 0 & 1/98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 11 \\ 11 & -11 \end{pmatrix}$$

BLOQUE B.- 2,5 puntos. El alumno debe contestar a UNO de los DOS problemas siguientes. Debe empezar a contestar a continuación de los enunciados y continuar al reverso de esta hoja, puede utilizar hojas adicionales.

B1.- El pasado invierno una granja avícola disponía de una vacuna para proteger a sus animales frente a la gripe aviar. Si un animal se ha vacunado, la probabilidad de que se infecte con el virus es de 0,1; sin la vacuna, dicha probabilidad es de 0,3. El 40% de las aves se vacunó.

```
AVE
├─ Vacunada (0,40)
│   ├─ Infectada (0,10)
│   └─ No infectada (0,90)
└─ No vacunada (0,60)
    ├─ Infectada (0,30)
    └─ No infectada (0,70)
```

a) Halla la probabilidad de que un ave elegida al azar se infecte con el virus.

$$P(I) = P(V) * P\left(\frac{I}{V}\right) + P(\bar{V}) * P\left(\frac{I}{\bar{V}}\right) = 0{,}4 * 0{,}1 + 0{,}6 * 0{,}3 = 0{,}22 \rightarrow 22\%$$

b) Si el ave elegida al azar se ha infectado con el virus ¿cuál es la probabilidad de que esté vacunada?

$$P\left(\frac{V}{I}\right) = \frac{P(V \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}4 * 0{,}1}{0{,}22} = \frac{0{,}04}{0{,}22} = 0{,}1818 \rightarrow 18{,}2\%$$

c) Si el ave elegida al azar no está infectada con el virus, ¿cuál es la probabilidad de que no esté vacunada?

$$P\left(\frac{\bar{V}}{\bar{I}}\right) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{0{,}6 * 0{,}7}{1 - 0{,}22} = \frac{0{,}42}{0{,}78} = 0{,}5385 \rightarrow 53{,}85\%$$

B2.- La edad a la que se independizan los jóvenes en los países nórdicos es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 4 años. Para estimar la media se elige aleatoriamente una muestra de 100 jóvenes de dicha población.

a) ¿Cuál es la varianza de la distribución muestral?

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

La varianza de la distribución muestral es:

$$Varianza\ (\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4^2}{100} = \frac{16}{100} = 0{,}16\ años^2$$

b) Si la media muestral es 24 años, halla un intervalo de confianza al 90 % para la media poblacional.

$$IC = \left[\bar{X} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Para calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$ debemos tener en cuenta el nivel de confianza del 90%.

$$\alpha = 0{,}1 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05 \rightarrow buscar\ en\ la\ tabla\ 0{,}95$$

$$Para\ el\ 90\% \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$$

Ya podemos calcular el intervalo de confianza:

$$IC = \left[24 \pm 1{,}645 * \frac{4}{\sqrt{100}}\right] = [23{,}34; 24{,}66]$$

c) ¿Cuál es el error cometido?

El error de un intervalo de confianza es $z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

En este caso, el error es 0,66.

BLOQUE C.- 2,5 puntos. El alumno debe contestar a CINCO de las OCHO cuestiones siguientes.

1.- El resultado de hacer B x A es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 7 \\ 7 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

a) No es posible hacer B x A

b) La matriz nula

c) Ninguna de las otras

2.- Sabiendo que el producto de A x B es C, ¿cuál es el valor de x?

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -7 \\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ x \\ 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) x = -7

b) x = 7

c) Ninguna de las otras

3.- La función $f(x) = \frac{-7x}{x+7}$ tiene:

a) Asíntota horizontal y = -7

b) Asíntota vertical x = 7

c) Ninguna de las otras

4.- La función $f(x) = \frac{-7x^2}{x+7}$ tiene un máximo en el punto:

a) x = -14

b) x = 14

c) Ninguna de las otras

5.- Calcular $\int \left(-\frac{7}{x^2} - \frac{7}{x}\right) dx$

a) $\frac{7}{x} + 7\ln(x) + C$

b) $-\frac{7}{x} - \ln(x) + C$

c) Ninguna de las otras

6.- Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, la afirmación siguiente es correcta:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

a) Si A y B son sucesos distintos

b) Si A y B son sucesos independientes

c) Ninguna de las otras

7.- ¿Cuál es el área total bajo la curva de la distribución normal?

a) 100

b) Depende de los valores de la media y la desviación típica

c) Ninguna de las otras

8.- ¿Qué ocurre con el intervalo de confianza si aumenta el valor de la desviación típica poblacional σ ?

a) Se vuelve más estrecho

b) Se mantiene igual

c) Ninguna de las otras

BLOQUE D.- 2,5 puntos. El alumno debe contestar al problema siguiente. Debe empezar a contestar a continuación del enunciado y continuar al reverso de esta hoja, puede utilizar hojas adicionales.

D1.- Disponemos de 36 metros de valla para cerrar un jardín rectangular. Queremos que el área del jardín sea la máxima posible. Se pide:

a) La función objetivo y la restricción correspondiente.

La función objetivo es el área del jardín. En este caso, al ser un rectángulo, el área es base por altura.

$$\acute{A}rea\ (x, y) = x * y$$

La restricción que debemos respetar es el perímetro de 36 metros.

$$2x + 2y = 36$$

b) ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima?

Despejamos y de la restricción → $y = 18 - x$

Sustituimos en la función del área que tenemos que maximizar → $A = x(18 - x) = 18x - x^2$

Para maximizar una función, derivamos e igualamos a cero

$$A'(x) = 18 - 2x$$
$$18 - 2x = 0 \rightarrow x = 9$$

$$y = 18 - x = 18 - 9 = 9$$

El rectángulo pedido será un cuadrado de 9 metros de largo y 9 metros de ancho, para un área máxima de 81 metros cuadrados.