REFUERZO MATEMÁTICAS II

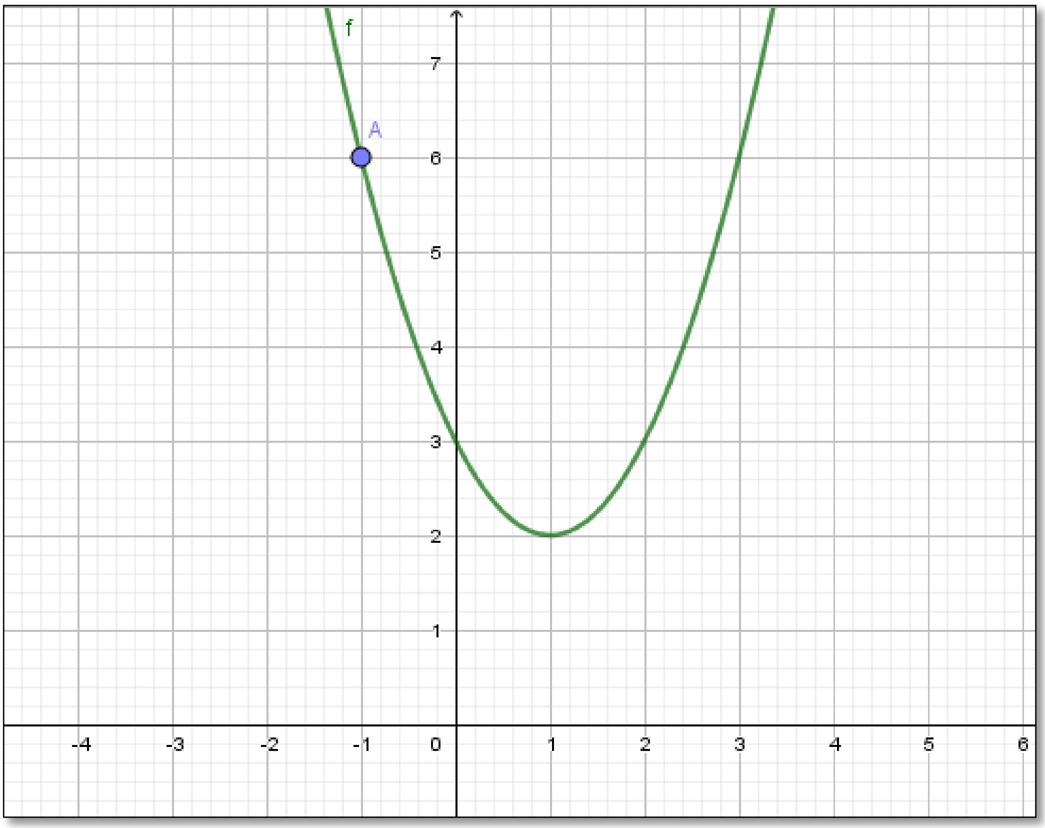
Bloque III: Análisis

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Recuerda:

- **Puntos de una función:**

$$\boldsymbol{y = f(x) = x^2 - 2x + 3 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = (-1)^2 - 2(-1) + 3 = 6 \end{cases} \rightarrow P = (-1, 6)}$$



- **Dominio de una función:** Todos los valores de 'x' para los que existe 'y'.

x	y = f(x)
-2	11
-1	6
0	3
1	2
2	3

$$\boldsymbol{Dom\ f(x) = Todos\ los\ n\acute{u}meros\ reales}$$
$$\boldsymbol{Dom\ f(x) = D = \{R\}}$$

- **Imagen de una función:** Conjunto de valores de 'y'.

$$\boldsymbol{Im\ f(x) = N\acute{u}meros\ reales\ desde\ el\ 2\ (incluido) hasta + \infty} \rightarrow Ver\ gr\acute{a}fica\ (eje\ y)$$
$$\boldsymbol{Im\ f(x) = I = \{[2, +\infty)\}}$$

1. Obtener tres puntos pertenecientes a las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = x^2 - x - 1$
c) $f(x) = \frac{3x+2}{2}$
d) $f(x) = \frac{-x+2}{x-1}$
e) $f(x) = \sqrt{x+5}$
f) $f(x) = logx \rightarrow Recuerda\ que\ no\ existen\ los\ logarítmos\ de\ los\ número\ negativos\ y\ el\ cero.$
g) $f(x) = e^x$

2. Comprobar si los siguientes puntos pertenecen a la función $f(x) = x^2 - x - 1$:

a) $A = (1,0)$
b) $B = (1,-1)$
c) $C = (0,-1)$
d) $D = (-2,5)$
e) $E = (-1,-1)$

3. Calcula la coordenada en 'y' del punto de la función $f(x) = \frac{-x+2}{x-1}$ cuyo valor en 'x' es:

a) $x = 1$
b) $x = 0$
c) $x = -1$
d) $x = -2$
e) $x = 3$

4. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = x^2 - x - 1$
c) $f(x) = \frac{3x+2}{2}$
d) $f(x) = \frac{-x+2}{x-1} \rightarrow Recuerda\ que\ f(x) no\ existe\ cuando\ se\ anula\ el\ denominador.$
e) $f(x) = \sqrt{x+5} \rightarrow Recuerda\ que\ no\ existen\ las\ raíces\ de\ números\ negativos.$
f) $f(x) = logx\ \rightarrow Recuerda\ que\ no\ existen\ los\ logarítmos\ de\ los\ número\ negativos\ y\ el\ cero.$
g) $f(x) = e^x$

5. Calcular la imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = x^2 - x - 1$
c) $f(x) = \frac{3x+2}{2}$
d) $f(x) = \frac{-x+2}{x-1}$
e) $f(x) = \sqrt{x+5}$
f) $f(x) = logx$
g) $f(x) = e^x$

NOTA: Representa gráficamente las funciones para ver cuáles son los valores que toma ‘y’. Para ello puedes utilizar programas como Geogebra.

6. Esboza las siguientes funciones dando valores (como mínimo 4 valores, 2 positivos y 2 negativos):

a) $f(x) = 2x - 1$
b) $f(x) = x^2 - x - 1$
c) $f(x) = \frac{3x+2}{2}$
d) $f(x) = \frac{-x+2}{x-1}$
e) $f(x) = \sqrt{x+5}$
f) $f(x) = logx$
g) $f(x) = e^x$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Recuerda:

- **Límite de una función en un punto:**
  Permite calcular el valor al que se acerca la función (y = f(x)) cuando 'x' se aproxima a un número.

$$\boldsymbol{Valor\ aproximado} \rightarrow \lim_{x\to 1}(x^2-2x-1) = (1)^2 - 2\cdot(1) - 1 = -2$$

$$\boldsymbol{Valor\ exacto} \rightarrow f(x) = x^2-2x-1 \rightarrow Cuando\ x = 1 \rightarrow f(1) = (1)^2 - 2\cdot(1) - 1 = -2$$

- **Límite de una función en el infinito:**
  Permite calcular el valor al que se acerca la función (y = f(x)) cuando 'x' se aproxima a un valor muy grande o muy pequeño.

$$\boldsymbol{Valor\ aproximado} \rightarrow \lim_{x\to +\infty}(x^2-2x-1) = (+\infty)^2 - 2\cdot(+\infty) - 1 = +\infty$$

$$\boldsymbol{Valor\ exacto} \rightarrow f(x) = x^2-2x-1 \rightarrow Cuando\ x = 10^{100} \rightarrow f(10^{100}) = (10^{100})^2 - 2\cdot(10^{100}) - 1$$

- **Límites indeterminados:**
  - ∞/∞ ó $0/0$:
    - Se divide el numerador y el denominador entre la 'x' elevada al mayor exponente o aplico l'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-1}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1-\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}}{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}} = \frac{1-0-0}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

    - Comparación de infinitos. Hay que fijarse en el ∞ más grande del numerador y del denominador y luego compararlos.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-1}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{\infty^2-2\infty-1}{2\infty+1} = \infty \rightarrow Porque\ \infty^2 > 2\infty$$

- $\infty - \infty$: Operar.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x^2+x}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+x}\right)^2}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2)-(x^2+x)}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2-x^2-x}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-2}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{x^2+x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{x}{x} - \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}} = \frac{-1 - \frac{2}{\infty}}{\sqrt{1 - \frac{2}{\infty^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{\infty}}} = \frac{-1-0}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

- $0 \cdot \infty$: Pasar a una indeterminación del tipo ∞/∞ ó $0/0$ $\to f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty} (x+7) \cdot \left(\frac{1}{2x+1}\right) = \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+7}{2x+1}\right) = \frac{\infty}{\infty} \to \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{7}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

- 0^0 ó ∞^0 : Hay que tomar logaritmos a ambos lados de la igualdad.

- 1^∞ : Aplicar la fórmula: $\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x) \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right)}$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}} = 1^\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2} - 1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2}\right)}$$

$$e^{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{2x+1-(x+2)}{x+2}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$$

$$e^{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x^2+3x+2}\right)} = e^{\frac{0-0}{1+0+0}} = e^0 = 1$$

1. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}(x^2-1)$
b) $\lim_{x\to -2}(x^2-1)$
c) $\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2}$
d) $\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{2}$
e) $\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2}$
f) $\lim_{x\to -2}\sqrt{x^2+3}$
g) $\lim_{x\to 100}\log x$
h) $\lim_{x\to 4}e^{x+3}$
i) $\lim_{x\to -3}e^{x+3}$
j) $\lim_{x\to -4}e^{x+3}$

2. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to \infty}(x^2-1)$
b) $\lim_{x\to -\infty}(x^2-1)$
c) $\lim_{x\to \infty}\frac{x+3}{2}$
d) $\lim_{x\to \infty}\frac{3}{x+1}$
e) $\lim_{x\to \infty}\sqrt{x^2+3}$

3. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x-3}$
b) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+1}{x-3}$
c) $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2-3}$
d) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-2x}{-x^2-4}$
e) $\lim_{x\to +\infty}(x^2-2)-(2x^2-x)$
f) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-x}$
g) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+2}-\sqrt{x-5}$
h) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x^2+1}$
i) $\lim_{x\to +\infty}(x-1)\cdot\left(\frac{x}{2x+1}\right)$
j) $\lim_{x\to +\infty}(x^2-4)\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right)$

k) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$

l) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x-1}$

m) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{x}$

CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD

Recuerda:

- **Continuidad de una función en un punto:**
  - Tiene que existir la función en el punto.
  - Los límites laterales cuando 'x' tiende al punto tienen que ser iguales y finitos.
  - El valor de la función en el punto y el valor del límite de la función en el punto tienen que ser iguales.

Ejemplo:

$$\textit{Estudio de la continuidad de la función } f(x) = x^2 - 2x - 1 \textit{ en } x = 2$$

$$\textit{Cuando } x = 2 \rightarrow y = f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -1 \rightarrow \textit{Existe el punto } P = (2, -1)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 - 2x - 1) = (2,000\ldots 1)^2 - 2 \cdot (2,000\ldots 1) - 1 \approx -1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 2x - 1) = (1,999\ldots 9)^2 - 2 \cdot (1,999\ldots 9) - 1 \approx -1 \end{cases}$$

$$\textit{Existe } \lim_{x\to 2} f(x) = -1 \textit{ porque } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$$
$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = -1$$

$$\textit{Conclusión: La función es contínua en } x = 2$$

- **Discontinuidad de una función en un punto:**
  - <u>Discontinuidad evitable:</u>
    - *Caso 1*: No existe la función en el punto.
    - *Caso 2*: La función en el punto no coincide con el límite de la función en el punto.
  - <u>Discontinuidad inevitable o de 1° especie:</u>
    Existen los límites laterales pero son distintos.
    - Salto finito: $\left| \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \right| = \textit{número}$
    - Salto infinito: $\left| \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \right| = \infty$
  - <u>Discontinuidad esencial o de 2° especie:</u>
    No existe alguno de los límites laterales.

1. Estudiar si las siguientes funciones son continuas en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1 \; en \; x = -1$
b) $f(x) = \frac{5}{x^4 - 16} \; en \; x = 2$
c) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \; en \; x = 1$
d) $f(x) = \sqrt{x - 3} \; en \; x = 0$
e) $f(x) = \sqrt{x + 2} \; en \; x = 2$
f) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \; x < 2 \\ 2x - 1 & si \; x \geq 2 \end{cases} \; en \; x = 2$
g) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \; x < 2 \\ 2x - 1 & si \; x \geq 2 \end{cases} \; en \; x = 2$
h) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \; x \leq 0 \\ 2x - 1 & si \; x > 0 \end{cases} \; en \; x = 0$
i) $f(x) = \begin{cases} 1/x & si \; x < 1 \\ \sqrt{x + 1} & si \; x \geq 1 \end{cases} \; en \; x = 1$
j) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x + 1} & si \; x \leq 0 \\ x^2 + 1 & si \; x > 0 \end{cases} \; en \; x = 0$
k) $f(x) = |x|$
l) $f(x) = |x + 1|$

2. Indicar, en los casos que sea posible, el tipo de discontnuidad que se produce en las funciones del ejercicio 1.

DERIVABILIDAD

Recuerda:

- **Derivada de una función en un punto:**
    - La función tiene que ser continua en el punto.
    - Los límites laterales de la derivada de la función cuando 'x' tiende al punto tienen que ser iguales y finitos.

$$\boldsymbol{Existe\ f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)\ cuando\ f'(a^+) = f'(a^-)\ es\ decir\ \lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x)}$$

1. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1\ en\ x = -1$
b) $f(x) = \frac{5}{x^4-16}\ en\ x = 2$
c) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}\ en\ x = 1$
d) $f(x) = \sqrt{x-3}\ en\ x = 0$
e) $f(x) = \sqrt{x+2}\ en\ x = 2$
f) $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x-1 & si\ x \geq 2 \end{cases}\ en\ x = 2$
g) $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x-1 & si\ x \geq 2 \end{cases}\ en\ x = 2$
h) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & si\ x \leq 0 \\ 2x-1 & si\ x > 0 \end{cases}\ en\ x = 0$
i) $f(x) = \begin{cases} 1/x & si\ x < 1 \\ \sqrt{x+1} & si\ x \geq 1 \end{cases}\ en\ x = 1$
j) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} & si\ x \leq 0 \\ x^2+1 & si\ x > 0 \end{cases}\ en\ x = 0$
k) $f(x) = |x|$
l) $f(x) = |x+1|$

2. Calcular la función derivada de las funciones del ejercicio 1.

MONOTINÍA. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Recuerda:

- **Crecimiento y decrecimiento de una función.´**
  - Función creciente en x = a: $\boldsymbol{f'(a) > 0}$
  - Función decreciente en x = a: $\boldsymbol{f'(a) < 0}$

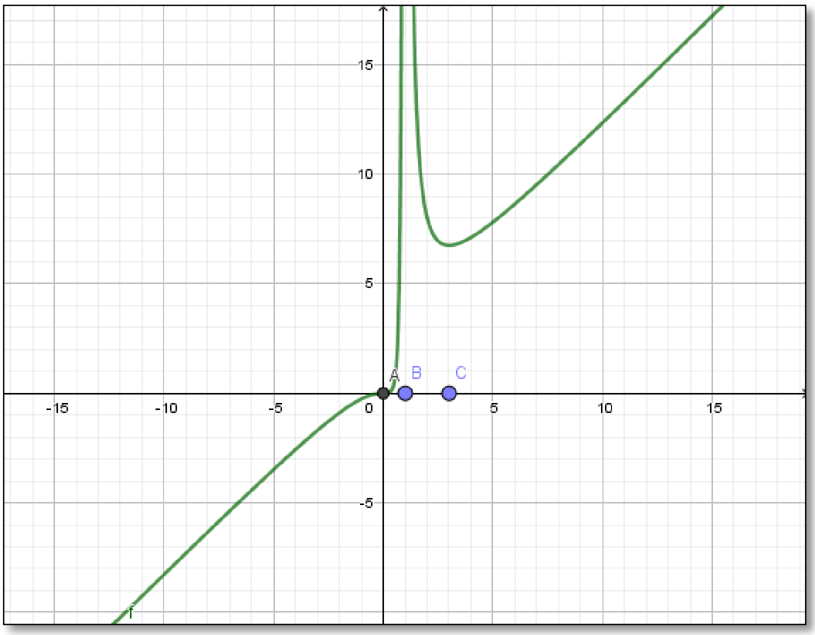
NOTA: Cuando no me especifican donde estudiar la continuidad de la función, la estudio en los puntos donde la función no está definida (me fijo en el domino) y los puntos donde se anula la primera derivada.

Ejemplo:

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}\rightarrow\begin{cases} D=R-\{1\}\rightarrow x=1 \\ f'(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0\rightarrow x=0\ y\ x=3\end{cases}$$

$$\textit{Estudio del crecimiento y decrecimiento de la función en los intervalos}\begin{cases}(-\infty,0)\rightarrow f'(-1)>0\\ (0,1)\rightarrow f'(0,5)>0\\ (1,3)\rightarrow f'(2)<0\\ (3,+\infty)\rightarrow f'(4)>0\end{cases}$$

$$\textit{Conclusón}\begin{cases}(-\infty,0)\rightarrow Crece\\ (0,1)\rightarrow Crece\\ (1,3)\rightarrow Derece\\ (3,+\infty)\rightarrow Crece\end{cases}$$



- **Cálculo de máximos y mínimos relativos.**
  - Cálculo de 'x' donde puede existir un máximo o mínimo: $\boldsymbol{f'(x) = 0 \rightarrow saco\ x = a}$
  - Comprobación:
    - Máximo: $\boldsymbol{f''(a) < 0}$
    - Mínimo: $\boldsymbol{f''(a) > 0}$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0 \rightarrow x = 0\ y\ x = 3}$$

$$\boldsymbol{Compruebo\ si\ se\ trata\ de\ un\ máximo\ o\ un\ mínimo \begin{cases} x = 0 \rightarrow f''(0) = \dfrac{6 \cdot 0}{(0-1)^4} = 0 \rightarrow Posible\ PI \\ x = 3 \rightarrow f''(3) = \dfrac{6 \cdot 3}{(3-1)^4} > 0 \rightarrow Mínimo \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{Conclusión: Hay\ un\ mínimo\ en\ el\ punto\ P = \left(3, \frac{27}{4}\right) \begin{cases} x = 3 \\ y = f(3) = \dfrac{3^3}{(3-1)^2} = \dfrac{27}{4} \end{cases}}$$

1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - x^3$
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 4$
d) $f(x) = x + \frac{4}{x}$
e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$
f) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
g) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$
h) $f(x) = x + \sqrt{x}$
i) $f(x) = \sqrt{x+1}$
j) $f(x) = e^{-(x+1)^2}$
k) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
l) $f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$
m) $f(x) = x + ln(x^2 - 1)$
n) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

2. Calcule los máximos y mínimos de las siguientes funciones si es posible:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
b) $f(x) = 3x + x^3$
c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$
d) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$
e) $f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$
f) $f(x) = x + ln(x^2 - 1)$
g) $f(x) = sen\ 2x$

CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Recuerda:

- **Concavidad y convexidad de una función.**
    - Función convexa (U) en x = a: $\boldsymbol{f''(a) > 0}$
    - Función cóncava (∩) en x = a: $\boldsymbol{f''(a) < 0}$

NOTA: Cuando no me especifican donde estudiar la continuidad de la función, la estudio en los puntos donde la función no está definida (me fijo en el domino) y los puntos donde se anula la segunda derivada.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \rightarrow \begin{cases} D = R - \{1\} \rightarrow x = 1 \\ f''(x) = \dfrac{6x}{(x-1)^4} = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{Estudio\ la\ concavidad\ y\ convexidad\ de\ la\ funci\acute{o}n\ en\ los\ intervalos \begin{cases} (-\infty, 0) \rightarrow f''(-1) < 0 \\ (0,1) \rightarrow f''(0,5) > 0 \\ (1,+\infty) \rightarrow f''(2) > 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{Conclus\acute{o}n \begin{cases} (-\infty, 0) \rightarrow\ C\acute{o}ncava \cap \\ (0,1) \rightarrow\ Convexa \cup \\ (1,+\infty) \rightarrow Convexa \cup \end{cases}}$$

- **Cálculo de puntos de inflexión.**
    - Calculo ‘x’ donde puede existir un punto de inflexión: $\boldsymbol{f''(x) = 0 \rightarrow saco\ x = a}$
    - Comprobación: $\boldsymbol{f'''(a) \neq 0}$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \rightarrow x = 0}$$

$$\boldsymbol{Compruebo\ si\ se\ trata\ de\ un\ punto\ de\ inflexi\acute{o}n\ \rightarrow x = \textcolor{red}{0} \rightarrow f'''(\textcolor{red}{0}) \neq 0}$$

$$\boldsymbol{Conclus\acute{o}n: Hay\ un\ PI\ en\ el\ punto\ P = (0,0) \begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) = \dfrac{0^3}{(0-1)^2} = 0 \end{cases}}$$

1. Estudie la concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - x^3$
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 4$
d) $f(x) = x + \frac{4}{x}$
e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$
f) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$
g) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$
h) $f(x) = x + \sqrt{x}$
i) $f(x) = \sqrt{x+1}$
j) $f(x) = e^{-(x+1)^2}$
k) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
l) $f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$
m) $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$
n) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

2. Calcule los puntos de inflexión de las siguientes funciones si es posible:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
b) $f(x) = 3x + x^3$
c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$
d) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-6x+9}$
e) $f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$
f) $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$
g) $f(x) = sen\ 2x$