C.E. Luis Vives
Sol: 91 559 4770

EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS

EXPERIENCIAS DETERMINISTAS Y ALEATORIAS

Se llama **experiencia determinista** a aquella que conocemos el resultado antes de realizar el experimento: lanzamos una piedra y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc.

Se llama **experiencia aleatoria** a aquella cuyo resultado depende del azar: lanzar un dado, extraer una carta de una baraja, sacar bolas de una urna,...

SUCESO ALEATORIO

Suceso aleatorio es un acontecimiento que ocurrirá o no dependiendo del azar.

ESPACIO MUESTRAL

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, y se designa con la letra **E**.

Por ejemplo**:** En un dado → E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

En una moneda → E = {C, cruz}

SUCESOS

Se llama **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Los elementos de E se llaman **sucesos individuales** o **sucesos elementales**

También son sucesos el suceso vacío o **suceso imposible**, ∅, y el propio E, **suceso seguro.**

Al conjunto de todos los sucesos de una experiencia aleatoria lo llamaremos S.

Si E tiene un número finito, n, de elementos, el número de sucesos de E es 2^n.

EJEMPLO 1: Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras alargadas de una regleta. Dejamos caer la regleta y anotamos el número de la cara superior.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres que sean no elementales.

c) ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

a) E = {1, 2, 3, 4}

b) Suceso elemental (cualquiera que conste de un único elemento) A = {2}

Suceso no elemental (cualquiera que conste de más de un elemento) B = {2, 3}, C= {1, 2, 4}, D = E

c) 2^4 = 16 sucesos (ϕ , {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4},{1, 3, 4}, {2, 3, 4},{1, 2, 3, 4}=E)

OPERACIONES CON SUCESOS

Dados dos sucesos A y B, se llama

Unión: $A \cup B$ (se lee "A unión B") es el suceso formado por todos los elementos de A y de B

El suceso $A \cup B$ se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos.

Intersección: $A \cap B$ (se lee "A intersección B") es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y de B.

El suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

Diferencia: A – B (se lee "A menos B") es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

El suceso A **–** B se verifica cuando lo hace A y no B

Complementario: El suceso A' = A^c = $\bar{A}$ = E – A se llama suceso contrario o complementario de A.
El suceso A' se verifica siempre cuando no se verifique A.

Sucesos incompatibles: Dos sucesos, A y B, se llaman incompatibles cuando no tienen ningún elemento común. Es decir, cuando $A \cap B = \varnothing$
Los sucesos incompatibles no se pueden verificar simultáneamente.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON SUCESOS

Distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De simplificación: $A \cup (B \cap A) = A$
$A \cap (B \cup A) = A$

Con el complementario: $(\bar{\bar{A}}) = A$
$A - B = A \cap \bar{B}$
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (Leyes de Morgan)

EJEMPLO 2: Consideramos la experiencia "lanzar un dado". A partir de los conjuntos:
A = {1, 2, 3, 4} B = {1, 3, 5} C = {2, 4}
a) Obtén los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, B´
b) Obtén los conjuntos $(A \cup B)'$, $\overline{A \cap B}$, $A' \cup B'$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan.
c) Calcula $B \cup C$ y $B \cap C$

Solución:
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $\bar{A} = \{5, 6\}$, $B' = \{2, 4, 6\}$
b) $(A \cup B)'$: $A \cup B = \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{6\}$
$\overline{A \cap B}$: $A \cap B = \{1, 3\} \Rightarrow \overline{A \cap B} = \{2, 4, 5, 6\}$
$A' \cup B' = \{5, 6\} \cup \{2, 4, 6\} = \{2, 4, 5, 6\} = (A \cap B)'$ (Se cumple una de las Leyes de Morgan)
$\bar{A} \cap \bar{B} = \{5, 6\} \cap \{2, 4, 6\} = \{6\} = (A \cup B)'$ (Se cumple la otra Ley de Morgan)
c) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B \cap C = \phi$

FRECUENCIA Y PROBABILIDAD

FRECUENCIA ABSOLUTA Y FRECUENCIA RELATIVA

Realizamos N veces una experiencia aleatoria.
Se llama **frecuencia absoluta** de un suceso S o, simplemente, frecuencia de S, al número de veces que ocurre S. Se designa por f(S).
Se llama **frecuencia relativa** de un suceso S a la proporción de veces que ocurre S. Se designa por
fr(S): $fr(S) = \frac{f(S)}{N}$

PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES

Axiomáticas: Inspiradas en las propias de la frecuencia relativa
Las propiedades de cada suceso es un número. Se han de cumplir los siguientes axiomas:

Ax.1: Cualquiera que sea el suceso S, $P(S) \geq 0$

Ax.2: Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades. $A \cap B = \varnothing \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ax.3: La probabilidad total es 1: $P(E) = 1$

En esencia, estas tres propiedades indican que disponemos de una cantidad total de probabilidad igual a 1 que hemos de repartir aditivamente entre los distintos sucesos.

Teoremas: Se deducen de las propiedades axiomáticas

T.1: $P(A') = 1 - P(A)$

T.2: $P(\varnothing) = 0$

T.3: Si $A \subset B$, entonces $P(B) = P(A) + P(B-A)$

T.4: Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

T.5: Si A1, A2, ..., Ak son incompatibles dos a dos, entonces:

$P(A1 \cup A2 \cup .... \cup Ak) = P(A1) + P(A2) + ... + P(Ak)$

T.6: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

T.7: Si el espacio muestral E es finito y un suceso es S = {x1, x2, ..., xk}, entonces:

$P(S) = P(x1) + P(x2) + ... + P(xk)$

EJEMPLO 3: Conocemos las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,4$ $P(B) = 0,7$ $P(A' \cup B')=0,2$

Calcula $P(A \cap B)'$ $P(A \cap B)$ $P(A \cup B)$

Solución: $P(A' \cup B') = \underbrace{0,2 = P(A \cap B)'}_{\text{Leyes de Morga}} \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$

$P(A \cap B)' = 0,2$

$P(A \cap B) = 0,8$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0,4 + 0,7 - 0,8 = 0,3$

EJEMPLO 4: Sabemos que: $P(M \cup N) = 0,6$ $P(M \cap N) = 0,1$ $P(M') = 0,7$

Calcula P(M) y P(N)

Solución:

$P(M) = 1 - P(M') = 1 - 0,7 = 0,3$

$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N) \Rightarrow 0,6 = 0,3 + P(N) - 0,1 \Rightarrow P(N) = 0,6 - 0,3 + 0,1 = 0,4$

LEY DE LAPLACE

La propiedad **T.7** permite calcular la probabilidad de un suceso S conociendo las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Pero si el espacio muestral consta de n sucesos elementales equiprobables (todos ellos con la misma probabilidad 1/n), entonces la probabilidad de S sólo depende del número de sucesos elementales que lo componen: $P(S) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}$

LEY DE LAPLACE

Si E = {x1, x2, ..., xn} y P(x1) = P(x2) = ... = P(xn), entonces

$P(s) = \frac{\textit{Número de } \text{"casos favorables"} \textit{ a } S}{\textit{números de "casos posibles"}}$

Se dice que un suceso aleatorio es de Laplace cuando la probabilidad de todos sus sucesos elementales (casos) es la misma. Por ejemplo: un dado correcto, una moneda, una baraja,....

CASOS EN LOS QUE NO SE PUEDE APLICAR LA LEY DE LAPLACE

La ley de Laplace se puede aplicar **cuando todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad**.

Pero hay muchos casos en que esto no ocurre. Por ejemplo:

- **Instrumentos irregulares**: Dados trucados, una chincheta... Para evaluar la probabilidad de estos sucesos se recurre a la ley de los grandes números. P(S) = fr(S). Cuanto mayor sea la N más fiable será la estimación.
- **Instrumentos regulares, pero sucesos elementales no equiprobables:** Por ejemplo lanzamos dos dados correctos y sumamos sus resultados. Para calcular su probabilidad recurrimos a técnicas de recuento y modificamos la descripción de la experiencia de modo que los sucesos elementales sean equiprobables.

EJEMPLO 5: En una baraja de 40 cartas, hallar: P(As), P(Oros)

Solución: La baraja es un instrumento regular y todas las cartas tienen la misma probabilidad de ser elegidas, por tanto podemos aplicar la Ley de Laplace.

$$P(As) = \frac{n^o\ ases}{n^o\ cartas\ totales} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$P(Oros) = \frac{n^o\ oros}{n^o\ cartas\ totales} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

EJEMPLO 6: En una baraja hemos suprimido varias cartas. Entre las que quedan, se dan las siguientes probabilidades de ser extraídas: P(Rey)=0,15 P(Basto)=0,3 P(ni Rey ni Basto)=0,6
a) ¿Está entre ellas el rey de bastos? En caso afirmativo, da su probabilidad.
b) ¿Cuántas cartas hay?

Solución: $P(R) = 0{,}15 \quad P(B) = 0{,}3 \quad P(\overline{R} \cap \overline{B}) = 0{,}6 = P(\overline{R \cup B}) \Rightarrow P(R \cup B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

a) Tenemos que hallar la probabilidad $P(R \cap B)$

$P(R \cup B) = P(R) + P(B) - P(R \cap B) \Rightarrow 0{,}4 = 0{,}15 + 0{,}3 - P(R \cap B) \Rightarrow P(R \cap B) = 0{,}05$

Si está el rey de bastos, con una probabilidad del 0,05

b) Como $P(R \cap B) = 0{,}05 = \dfrac{1}{n^o\ \text{cartas totales}} \Rightarrow n^o\ cartas\ totales = \dfrac{1}{0{,}05} = 20\ cartas.$

EJEMPLO 7: Lanzamos un dado "chapucero" mil veces. Obtenemos f(1) = 117, f(2) = 302, f(3) = 38, f(4) = 234, f(5) = 196, f(6) = 113. Estima las probabilidades de las distintas caras. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos par, menor que 6, {1,2}

Solución: Como no es un objeto regular, no podemos aplicar la Ley de Laplace, hay que contar

a) $P(1) = fr(1) = \dfrac{f(1)}{N} = \dfrac{117}{1000} = 0{,}117$

$P(2) = fr(2) = \dfrac{f(2)}{N} = \dfrac{302}{1000} = 0{,}302$

$P(3) = fr(3) = \dfrac{f(3)}{N} = \dfrac{38}{1000} = 0{,}038$

$P(4) = fr(4) = \dfrac{f(4)}{N} = \dfrac{234}{1000} = 0{,}234$

$P(5) = fr(5) = \dfrac{f(5)}{N} = \dfrac{196}{1000} = 0{,}196$

$P(6) = fr(6) = \dfrac{f(6)}{N} = \dfrac{113}{1000} = 0{,}113$

b) $P(PAR) = P(2,4,6) = P(2) + P(4) + P(6) = 0{,}302 + 0{,}234 + 0{,}113 = 0{,}549$

c) $P(Menor\ que\ 6) = P(1,2,3,4,5) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 0{,}117 + 0{,}302 + 0{,}038 + 0{,}234 + 0{,}196 = 0{,}887$

Otra forma de hallarlo es utilizando la probabilidad del contrario:
$P(menor\ que\ 6) = 1 - P(6) = 1 - 0{,}113 = 0{,}887$ *(Más cómoda y rápida)*

d) $P(1,2) = P(1) + P(2) = 0{,}117 + 0{,}302 = 0{,}419$

EJEMPLO 8: ¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos?
Solución: Los objetos son regulares (dados correctos), pero no son equiprobables (no hay la misma probabilidad de que salga el 1 = 1.1 que el 12=2.6 = 3.4 = 4.3 = 6.2) por tanto, lo mejor es hacer una tabla y contar

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
2	*2*	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*
3	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*
4	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*	*24*
5	*5*	*10*	*15*	*20*	*25*	*30*
6	*6*	*12*	*18*	*24*	*30*	*36*

$$P(\text{Producto } 12) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

EJEMPLO 9: ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2?

Solución: Como en el ejemplo 8, rellenamos la tabla con las diferencias.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
2	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
3	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*	*3*
4	*3*	*2*	*1*	*0*	*1*	*2*
5	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*1*
6	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*

$$P(\text{Diferencia } 2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos, A y B, se llama **probabilidad de B condicionada a A**, y se designa por P(B/A) a $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ y mide la proporción de veces que ocurre B de entre las que ocurre A.
De la expresión anterior se deduce que $P(A \cap B) = P(A).\ P(B/A)$

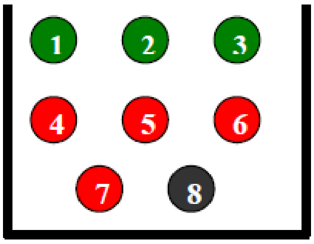
SUCESOS INDEPENDIENTES

Dos sucesos, A y B, se dice que son independientes cuando:
$P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$
Cuando dos sucesos son independientes la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades: A y B independientes $\rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

TABLAS DE CONTINGENCIA

Tablas que ayudan al estudio de probabilidades.

EJEMPLO 10: Tenemos una urna con las siguientes bolas:



Calcula las siguientes probabilidades:

a) P(Par/Verde)
b) P(Impar/Rojo)
c) P(Verde/Par)

Solución:

$$a)\ P(Par/Verde) = \frac{P(Par \cap Verde)}{P(Verde)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$$

$$a)\ P(Impar/Rojo) = \frac{P(Im\,par \cap Rojo)}{P(Rojo)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{2}{4}$$

$$a)\ P(Verde/Par) = \frac{P(Verde \cap Par)}{P(Par)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 11: Un colectivo de coches, se reparte según dos características: marca del coche y si ha tenido o no accidentes, en la siguiente tabla. Calcula:

	Seat	Volvo	Audi
Ac	400	200	400
No ac	49600	19800	29600

a) Probabilidad de que sea un "Seat"
b) Probabilidad de que no haya tenido accidente
c) Sabiendo que es un Volvo que haya tenido accidente
d) Sabiendo que no ha tenido accidente que sea Audi.

Solución: Completamos la tabla con los totales de filas y columnas.

	Seat	Volvo	Audi	Total
Ac	400	200	400	1000
No ac	49600	19800	29600	99000
Total	50000	20000	30000	100000

a) P(Seat) = 50000/100000 = 1/2 = 0,5
b) P(No ac) = 99000/100000 = 99/100 = 0,99
c) P(Acc/Volvo) =

$$\frac{P(Acc \cap Volvo)}{P(Volvo)} = \frac{200/100000}{20000/100000} = 0{,}01$$

d) P(Audi/No acc) =

$$\frac{P(Audi \cap No\ ac)}{P(No\ ac)} = \frac{29600/100000}{99000/100000} = 0{,}299$$

PRUEBAS COMPUESTAS

Se llaman **pruebas compuestas** a aquellas experiencias en las que fácilmente podemos distinguir dos o más etapas. En ellas, el cálculo de probabilidades de sucesos compuestos se simplifica mucho calculando las probabilidades de sus componentes.
Dos pruebas compuestas son **independientes** cuando el resultado de una no influye en la otra. Si no es así, se llaman **dependientes.**

EXPERIENCIAS INDEPENDIENTES

Se dice que **dos o más pruebas son independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no influye en las probabilidades de los distintos resultados de las otras. Por tanto, los sucesos correspondientes a la primera son independientes de los sucesos correspondientes a la segunda.

Si n pruebas son independientes y los sucesos S1, S2, ..., Sn corresponden, respectivamente, a cada una de ellas se cumple que:

P(S1 en la 1ª y S2 en la 2ª y ..... Sn en la n-ésima) = P(S1).P(S2).....P(Sn)

EXPERIENCIAS DEPENDIENTES

Dos experiencias son **dependientes** cuando el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda. Las probabilidades de sucesos compuestos se obtienen así:
P(S1 en la 1ª y S2 en la 2ª) = P(S1 en la 1ª).P(S2 en la 2ª supuesto que ocurrió S1 en la 1ª)

$$P(S1 \cap S2) = P(S1).P(S2/S1)$$

Si se encadenan más de dos experiencias dependientes, las probabilidades de los sucesos compuestos se obtienen análogamente:

$$P(S1 \cap S2 \cap S3) = P(S1).P(S2/S1).P(S3/S1 \cap S2)$$

EJERCICIO 12: Lanzamos tres dados. Calcula las siguientes probabilidades
a) Probabilidad de obtener "tres cuatros"
b) Probabilidad de no obtener "ningún seis"
c) Probabilidad de obtener "algún seis"
d) Probabilidad de un 6 en el primero y dos cincos en los otros dos.
e) Probabilidad de un 6 y dos cincos

Solución: Lanzar dados son sucesos independientes (El resultado de un dado no influye en el otro)

$$a)\ P(Tres\ cuatros) = P(4 \cap 4 \cap 4) = P(4).P(4).P(4) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

$$b) P(Ningún\ 6) = P(\overline{6} \cap \overline{6} \cap \overline{6}) = P(\overline{6}).P(\overline{6}).P(\overline{6}) = \frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

$$c)\ P(Algún\ 6) = 1 - P(Ningún\ seis) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

$$d) P(1°6 \cap 2°5 \cap 3°5) = P(1°6).P(2°5).P(3°5) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

$$e) P(Un\ 6\ y\ dos\ 5) = P(1°6 \cap 2°5 \cap 3°5)PR_3^{1,2} = P(1°6).P(2°5).P(3°5).\frac{3!}{1!2!} = \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.3 = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$

EJERCICIO 13: Tenemos un dado y las dos urnas descritas abajo:

- **Urna I: Con una bola negra, tres rojas y seis verdes**
- **Urna II: Con dos bolas negras, seis rojas y dos verdes**

Lanzamos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II.
Extraemos una bola de la urna correspondiente. Calcula las siguientes probabilidades:
a) P ({3,4,5,6} y Roja) b) P(Verde/1) c) P(Verde/5) d) P(2 y Verde)

Solución: Son sucesos dependientes (el resultado del dado, influye en el siguiente resultado)

$$Dado \begin{cases} 1,2 \Rightarrow Urna\ \mathrm{I}: 1N, 3R, 6V \begin{cases} N \\ R \\ V \end{cases} \\ 3,4,5,6 \Rightarrow Urna\ \mathrm{II}: 2N, 6R, 2V \begin{cases} N \\ R \\ V \end{cases} \end{cases}$$

$$a)\ P(\{3,4,5,6\} \cap Roja) = P(\{3,4,5,6\}.P(Roja/\{3,4,5,6\} = \frac{4}{6}.\frac{6}{10} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$b)\ P(Verde/1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$c)\ P(Verde/5) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$d)\ P(2 \cap Verde) = P(2).P(Verde/2) = \frac{1}{6}.\frac{2}{10} = \frac{1}{30}$$

PROBABILIDAD TOTAL

Tenemos n sucesos A1, A2, ..., An, incompatibles dos a dos y tales que A1 ∪ A2 ∪ .... ∪ An = E. Entonces, para cualquier suceso S se cumple que:

P(S) = P(A1).P(S/A1) + P(A2).P(S/A2) + ... + P(An).P(S/An)

A la probabilidad P(S) descompuesta de este modo se la llama **probabilidad total.**

DIAGRAMAS DE ÁRBOL: Esquema para el cálculo de la probabilidad total.

PROBABILIDADES "A POSTERIORI". FÓRMULA DE BAYES

$$P(Ai/S) = \frac{P(A_i).P(S/A_i)}{P(A_n).P(S/A_n) + ... + P(A_n).P(S/A_n)}$$

EJERCICIO 14: Tenemos dos urnas:

- **Urna I: 1 bola negra, 2 rojas y 3 verdes**
- **Urna II: 2 bolas negras, 1 roja y 1 verde**

La experiencia consiste en extraer una bola de I, e introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II. Calcula las siguientes probabilidades.

a) P (1º bola negra)
b) P (2º bola negra)
c) P (1º bola negra/2º bola roja)
d) P (2º bola roja/1º bola negra)

$$Urna\ I{:}1N,\ 2R,3V \begin{cases} N \Rightarrow UrnaII : 3N,1R,1V \begin{cases} N \\ R \\ V \end{cases} \\ R \Rightarrow UrnaII : 2N,2R,1V \begin{cases} N \\ R \\ V \end{cases} \\ V \Rightarrow UrnaII : 2N,1R,2V \begin{cases} N \\ R \\ V \end{cases} \end{cases}$$

a) P(1° bola negra) = $\frac{1}{6}$

b) P(2° bola negra) = $P(1°N \cap 2°N) + P(1°R \cap 2°N) + P(1°V \cap 2°N) = P(1°N).P(2°N/1°N) + P(1°R).P(2°N/1°R) + P(1°V).P(2°N/1°V) = \frac{1}{6}.\frac{3}{5} + \frac{2}{6}.\frac{2}{5} + \frac{3}{6}.\frac{2}{5} = \frac{13}{30}$

c) P(2° bola negra/1° bola roja) = $\frac{2}{5}$

d) P(1° bola roja/2° bola negra) = $\frac{P(1°R \cap 2°N)}{P(2°N)} =$

$$\frac{P(1°R).P(2°N/1°R)}{P(1°N).P(2°N/1°N) + P(1°R).P(2°N/1°R) + P(1°V).P(2°N/1°V)} = \frac{\frac{2}{6}.\frac{2}{5}}{\frac{1}{6}.\frac{3}{5} + \frac{2}{6}.\frac{2}{5} + \frac{3}{6}.\frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{13}{30}} = \frac{4}{13}$$