Centro de estudios Luis Vives

RESUMEN DE PROBABILIDAD

DEFINICIONES

- **Experimento aleatorio**: es aquél que repetido en las mismas circunstancias, puede ofrecer distintos resultados.
  Ejemplo: lanzar un dado al aire, sacar una carta de una baraja, lanzar una moneda,...

- **Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio**: Llamaremos espacio muestral asociado a un experimento aleatorio al conjunto formado por todos los resultados posibles del experimento. Se designa por "E".
  Ejemplo: si el experimento aleatorio es "lanzar un dado", su espacio muestral es: E={ 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

- **Suceso aleatorio:** Sea E el espacio muestral asociado a un determinado experimento aleatorio. Llamaremos suceso a cualquier subconjunto de E, incluidos el conjunto vacío "Ø" y el conjunto total E.
  Ejemplo: En el experimento "lanzar un dado", el suceso "salir par" sería P={ 2, 4, 6}

- **Suceso elemental**: Es todo subconjunto de E formado por un solo elemento.

- **Suceso compuesto**: Es cualquier suceso no elemental.

- **Suceso contrario (Complementario):** Se llama suceso contrario de A al que se verifica siempre que no se verifica A. Se indica por $\overline{A}$.

- **Suceso imposible**: Es aquel suceso que no se verifica nunca. Se designa por Ø.

- **Suceso seguro**: Es el que se verifica siempre. Se designa por E.

- **Sucesos compatibles:** Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común.

- **Sucesos incompatibles:** Dos sucesos A y B, son incompatibles cuando no tienen ningún elemento en común.

- **Sucesos independientes:** Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B.

- **Sucesos dependientes:** Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B.

ÁLGEBRA DE SUCESOS

Unión de dos sucesos:

El suceso A $\bigcup$ B, está formado por todos los sucesos elementales de A y por todos los sucesos elementales de B.

Intersección de dos sucesos:

El suceso intersección de A y B, simbólicamente A $\bigcap$ B, está formado por los sucesos elementales que están, a la vez, en A y en B.

Sucesos incompatibles (mutuamente excluyentes):

Dos sucesos A y B se dicen incompatibles cuando A $\bigcap$ B = Ø.

Diferencia de sucesos:

La diferencia de sucesos, A – B es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B.

$A - B = A \cap \bar{B}$

Leyes de Morgan:

1.- $\forall\ A, B \in \wp(E) \ \Rightarrow \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$

2.- $\forall\ A, B \in \wp(E) \ \Rightarrow \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD

1.- $0 \leq p(A) \leq 1$

2.- p (E) = 1

3.- $\forall\ A, B \in \wp(E)$ tales que A∩B=Ø, se verifica que p(A U B) = p(A) + p(B)

Consecuencias de la definición:

1.- Si A, B y C son sucesos mutuamente excluyentes dos a dos se verifica que:

$$p\ (A \cup B \cup C) = p\ (A) + p\ (B) + p\ (C)$$

2.- **p (Ā) = 1 – p (A)**

3.- **p (Ø) = 0**

4.- Si A y B no son incompatibles, entonces: **p (AUB) = p (A) + p (B) – p (A∩B)**

5.- Si $A \subset B \ \Rightarrow \ p(A) \leq p(B)$

REGLA DE LAPLACE

$$p(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Propiedades de la probabilidad condicionada:

1.- p(A/A) = 1
2.- Si p(A) ≠ 0 y p(B) ≠ 0, p(A∩B) = p(B/A)·p(A) =p(A/B)·p(B)
3.- Si A y B son incompatibles y no imposibles p(A/B) = p(B/A) = 0

Probabilidad de la intersección de sucesos independientes

P(A ∩ B) = p(A) · p(B)

Probabilidad de la intersección de sucesos dependientes

P(A ∩ B) = p(A) · p(B/A)

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$
Entonces, si B es un suceso cualquiera, se verifica que:

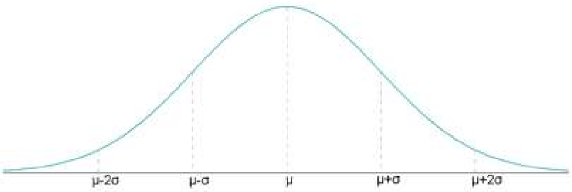
$$P(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ... + p(A_n \cap B) =$$
$$= p(A_1) \cdot p(B/A_1) + p(A_2) \cdot p(B/A_2) + ... + p(A_n) \cdot p(B/A_n)$$

TEOREMA DE BAYES

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ incompatibles dos a dos y tales que $E = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$
Entonces, si B es un suceso cualquiera, se verifica que:

$$p(A_i/B) = \frac{p(A_i)\, p(B/A_i)}{p(B)}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL



El área del recinto determinado por la función y el eje de abscisas **es igual a la unidad**.
Al ser **simétrica** respecto al eje que pasa por **x = μ**, deja un **área igual a 0.5 a la izquierda y otra igual a 0.5 a la derecha**.

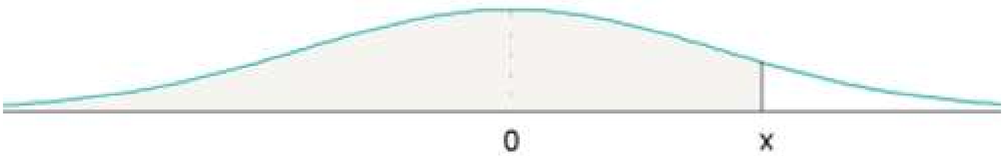
La probabilidad equivale al área encerrada bajo la curva.

$p(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) = 0.6826 = 68.26\ \%$

$p(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = 0.954 = 95.4\ \%$

$p(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997 = 99.7\ \%$

La distribución normal estándar, o tipificada o reducida, es aquella que tiene por media el valor cero, $\mu = 0$, y por desviación típica la unidad, $\sigma = 1$.



Tipificación de la variable

Para poder utilizar la tabla tenemos que transformar la variable X que sigue una distribución N(μ, σ) en otra variable Z que siga una distribución N(0, 1).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

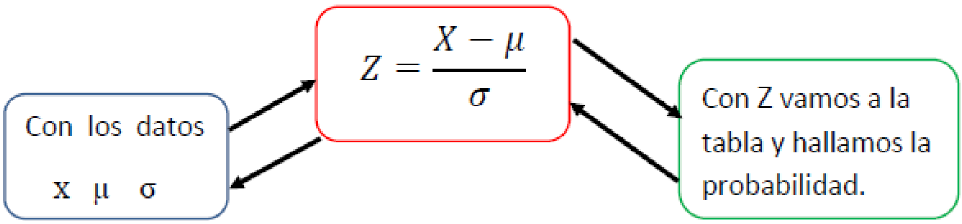
CAMBIO DE VARIBALE

	X	**Z**
Promedio o media	**μ**	**0**
1 desviación standard	**μ + σ**	**1**
2 desviaciones standard	**μ + 2σ**	**2**
3 desviaciones standard	**μ + 3σ**	**3**
1 desviación standard	**μ - σ**	**-1**
2 desviaciones standard	**μ - 2σ**	**-2**

Por ejemplo, hacemos el cambio de variable para $X = \mu + 3\sigma$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma} = \frac{3\sigma}{\sigma} = 3$$

Si tenemos un ejercicio con valores de X, μ y σ hacemos el cambio de variable y encontramos Z. Una vez encontrado Z, vamos a la tabla y con el valor de Z hallamos la probabilidad = área.



Cálculo de probabilidades en distribuciones normales

La **tabla** nos da las **probabilidades de P(z ≤ k)**, siendo **z** la variable tipificada.

Estas probabilidades nos dan la **función de distribución Φ(k)**.

Φ(k) = P(z ≤ k)

Búsqueda en la tabla de valor de k

Unidades y décimas en la columna de la izquierda.

Centésimas en la fila de arriba.

Ejemplo: la temperatura durante mayo sigue una distribución normal de media 18’7 ºC y desviación típica 5º C. Calcula la probabilidad de que la temperatura durante el mes de mayo esté por debajo de 21 ªC.

Primero tipificamos: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{21-18\prime7}{5} = 0\prime46$

Luego vamos a la tabla y buscamos la probabilidad para el valor z = 0’46

0,46

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	[illegible]	0,8315	0,8340	[illegible]	0,8389
	0,00	0,01	0,0[illegible]	[illegible]	0,04		0,06	0,07		0,09

La probabilidad es entonces 0’6772 = 67’72%.

¿Qué hacemos cuando el valor de z nos da un valor negativo?

Vamos a verlo con el siguiente ejemplo:

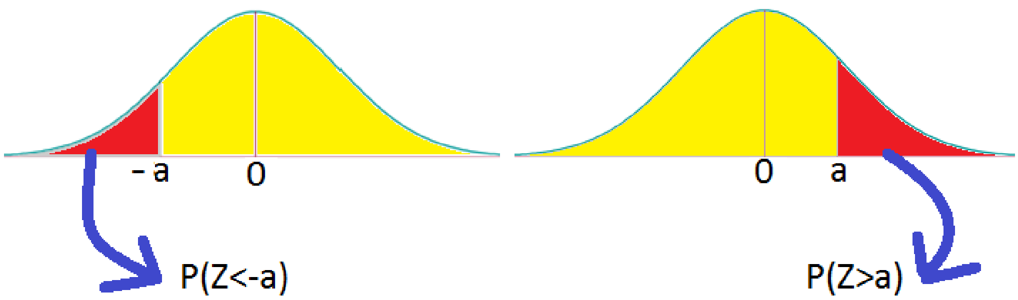
La media de los pesos de 5000 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen con una distribución normal, hallar cuántos estudiantes pesan menos de 60 kg.

$$\mu = 70\ kg; \ \ \sigma = 3\ kg; \ \ x = 60\ kg$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{60 - 70}{3} = -3'33$$

El valor negativo nos dice que estamos por debajo de la media, pero en la tabla no tenemos valores negativos, solo tenemos valores de z positivos.

Si comparamos con un dibujo el área que estamos buscando:



Vemos que la probabilidad de que z < -a es igual a la probabilidad de que z > a; lo hacemos entonces es calcular la probabilidad de que z < a, ya que es la probabilidad que nos proporciona la tabla, y que corresponde a la parte amarilla del dibujo y luego le restamos el complementario

1 – p(z < a)

En el caso del ejemplo, como nos ha dado z = - 3’33, buscamos en la tabla z = 3’33 → 0’9996

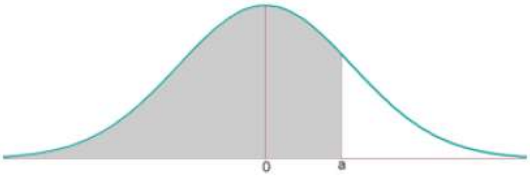
3,33

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0,9965	[illegible]	[illegible]	0,9968	[illegible]	0,9970	0,9971	0,9972	[illegible]	[illegible]
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

P (z < - 3’33) = P(z > 3’33) 1 – 0’9996 = 0’0004

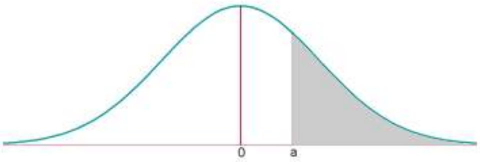
De los 5000 estudiantes, el 0’04% pesan menos de 60 kg, por tanto, 2 alumnos.

Repaso y ejemplos:



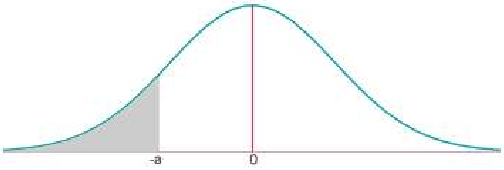
P (z ≤ a)

Ej.: P (z ≤ 1’3) = 0’9032



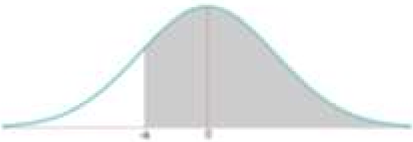
P (z > a) = 1 – P (z ≤ a)

Ej.: P (z > 1’3) = 1 – p(z ≤ 1’3) = 1 - 0’9032 = 0’0968



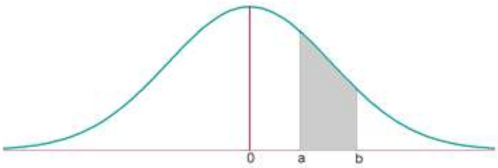
P (z ≤ a) = 1 – P (z ≤ a)

Ej.: P (z ≤ -1’3) = 1 – p(z ≤ 1’3) = 1 - 0’9032 = 0’0968



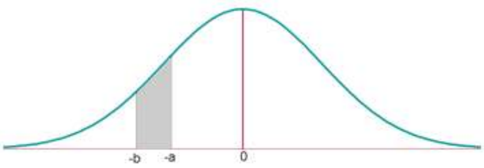
P (z > - a) = P (z ≤ a)

Ej.: P (z > - 1’3) = 0’9032



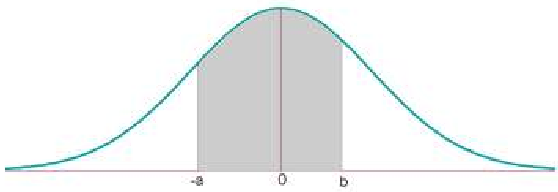
P(a < z ≤ b) = P (z ≤ b) – P (z ≤ a)

Ej.: P (0’55 < z < 1’30) = P (z ≤ 1’30) - P(z ≤ 0’55) = 0’9032 – 0’7088 = 0’1944



P(-b < z ≤ a) = P (a < z ≤ b)

Ej.: P (-1’30 < z ≤ - 0’55) = P (0’55 < z ≤ 1’30) = P(z ≤ 1’30) – P (z ≤ 0’55) = 0’9032 – 0’7088 = 0’1944



P(-a < z ≤ b) = P (z ≤ b) – [1 – P(z ≤ a)]

Ej.: P (-1’30 < z ≤ 0’55) = P (z ≤ 0’55) - [1 - P(z ≤ 1’30)] = 0’7088 – (1 - 0’9032) = 0’612

Si nos dan el caso inverso, es decir, conocemos el valor de la probabilidad y tenemos que hallar el valor de z, lo que hacemos es buscar el valor en la tabla que más se aproxime.

Ejemplo: p = 0’9463 → z = 1’61

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Centro de estudios
Luis Vives

Tabla de Distribución Normal Standard = Áreas bajo la Curva Normal

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabla e imágenes tomadas de la página: http://www. vitutor. net