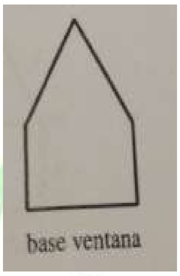
Problema 1 (2,5 puntos)

Se han comprado tres productos A, B y C. Sin tener en cuenta el IVA, el producto C vale 360 euros menos que la suma de los que cuestan A y B conjuntamente, mientras que el importe total de los tres productos asciende a 800 euros. El producto A paga un IVA del 6%, el producto B del 12% y el producto C del 30%. La factura total con IVA importa 917,60 euros.

- Plantear un sistema de ecuaciones para calcular la cantidad, sin IVA, que cuesta cada producto.
- Resolver el sistema por el método de Cramer.

Problema 2 (2,5 puntos)

Se desea construir una ventana rectangular rematada en la parte superior por un triángulo equilátero, tal como se muestra en la figura. El perímetro total de la ventana completa ha de ser 9 m. ¿Qué tamaño tiene que tener la base de la ventana para que su superficie sea máxima?



1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,2,1) y B(4,1,5) es:
   a) $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 4x - z - 11 = 0 \end{cases}$
   b) (x,y,z) = (3,2,1) + t(4,1,5)
   c) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$

2. La distancia del punto A(1.3.0) al plano x ≡ 4x – y + 3z – 2 = 0 vale:
   a) $\frac{4}{\sqrt{26}}$
   b) $\frac{3}{\sqrt{26}}$
   c) $\frac{1}{\sqrt{26}}$

3. Los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv \ -2x - 3y + 4z - 6 = 0 \\ \pi_2 \equiv 4x + 6y - 8z - 5 = 0 \end{cases}$ son:
   a) paralelos
   b) secantes
   c) coincidentes

4. Regularmente, el 37% de la población va al cine, el 11% al teatro y el 6% a ambas cosas. La proporción de personas que asisten regularmente a uno u otro tipo de espectáculos es:
   a) 0’54
   b) 0’48
   c) 0’42

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz inversa A^{-1} es

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. La integral $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$, donde ln es el logaritmo neperiano, es igual a:

a) ln $\left(\frac{e}{2}\right)$

b) ln (1 + e)

c) ln $\left(\frac{1+e}{2}\right)$

7. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La segunda fila de la matriz producto A · B es

a) (-1 3)

b) (-1 4)

c) (-1 6)

8. Si A y B son sucesos de un espacio de probabilidad, P(A) = $\frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, entonces P(B\A) es igual a

a) 1/2

b) 1/3

c) 1/6

9. El valor del $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ es igual a

a) -2

b) -1

c) 0

10. El área limitada por la curva y = $2x^2 + 5x - 3$, y la recta y = 3x + 1 vale

a) 27

b) 18

c) 9

EXAMEN MATEMÁTICAS II (Septiembre 2017)

PROBLEMAS

1.- A → x; B → y; C → z

Sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{x+y-z=360} \\ \boldsymbol{x+y+z=800} \\ \boldsymbol{1'06x+1'12y+1'3z=917'60} \end{cases}$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1'06 & 1'12 & 1'3 \end{vmatrix} = 1'3 + 1'06 - 1'12 + 1'06 - 1'12 - 1'3 = -0'12$$

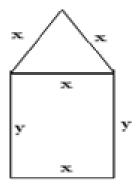
Como nos pide que resolvamos el sistema por Cramer:

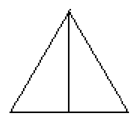
x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 360 & 1 & -1 \\ 800 & 1 & 1 \\ 917'60 & 1'12 & 1'3 \end{vmatrix}}{-0'12} = \dfrac{-36}{-0'12} = \mathbf{300};$

y = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 360 & -1 \\ 1 & 800 & 1 \\ 1'06 & 917'60 & 1'3 \end{vmatrix}}{-0'12} = \dfrac{-33'6}{-0'12} = \mathbf{280};$

z = $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 360 \\ 1 & 1 & 800 \\ 1'06 & 1'12 & 917'60 \end{vmatrix}}{-0'12} = \dfrac{-26'4}{-0'12} = \mathbf{220}$

2.-





A = A_r + A_T

P→ 3x + 2y = 9

A_r = x · y

A_T = $\frac{x \cdot h}{2}$ → $h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{3x^2}{4} = \frac{\sqrt{3}\,x}{2}$

A = x · y + $\frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}\,x}{2}}{2} = xy + \frac{\sqrt{3}\,x^2}{4} = xy + 0'43x^2$

Sustituimos y:

A = $x\left(\frac{9-3x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}\,x^2}{4} = 4'5x - 1'07x^2$

A (x) = 4'5x – 1'07 x^2

Hacemos la derivada de la función e igualamos a cero:

A'(x) = 4'5 – 2'14x → A'(x) = 0 → x = 4'5/2'14 = 2'10

Comprobamos si en ese punto hay un máximo haciendo la segunda derivada:

A'' (x) = - 2'14 < 0 → hay un máximo en x = 2'10 y por tanto el valor de la **base de la ventana es 2'10 m**

PREGUNTAS DE TEST

1.- a

A(3,2,1) B(4,1,5) $\vec{v} = (1, -1{,}4)$ → Hacemos las ecuaciones de esta recta para comprobar cuál es la solución correcta

(x,y,z) = (3,2,1) + t(1. -1,4)

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} t=x-3 \\ t=2-y \\ t=\frac{z-1}{4} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} x-3=2-y \\ x-3=\frac{z-1}{4} \end{matrix} \dashrightarrow \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 4x - z - 11 = 0 \end{cases}$$

2.- c

$$d\,(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \longrightarrow d(P, \pi) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 + 3 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

3.- a

$$\pi_1 \equiv -2x - 3y + 4z - 6 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 4x + 6y - 8z - 5 = 0$$

Como $\frac{-2}{4} = \frac{-3}{6} = \frac{4}{-8}$ son paralelos

4.- c

37% cine; 11% teatro; 6% cine y teatro

P(cine o teatro) → P(A U B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B) = 37 + 11 – 6 = 42% = 0’42

5.- b

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \frac{(AdjA)^T}{|A|}$ |A| = 1; Adj A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $(Adj\ A)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ = A^{-1}

Como el determinante es 1; en este caso, la matriz inversa coincide con la transpuesta de la adjunta de la matriz A

6.- c

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x}\, dx = \ln(1 + e^x]_0^1 = \ln(1 + e) - \ln(1 + 1) = \ln\frac{1 + e}{2}$$

7.- b

A · B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

8.- a

P(A) = 1/3   P(A ∩ B) = 1/6

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

9.- a

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - \sqrt{x+1}} = multiplicamos\ por\ el\ conjugado = \lim_{x \to 0} \frac{x\,(1 + \sqrt{x+1})}{\left(1 - \sqrt{x+1}\right) \cdot (1 + \sqrt{x+1})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + x\sqrt{x+1}}{-x} = -1 - \sqrt{x+1} = -1 - 1 = -2$$

10.- c

Se resuelve el sistema formado por las dos funciones para ver cuál o cuáles son los puntos de intersección entre ellas:

$y = 2x^2 + 5x - 3$

$y = 3x + 1$ → $2x^2 + 5x - 3 = 3x + 1$ → $x^2 + x - 2 = 0$ → $x_1 = 1$; $x_2 = -2$

$$\int_{-2}^{1} 2x^2 + 5x - 3 - \int_{-2}^{1} 3x + 1 = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 3x\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{3x^2}{2} + x\right]_{-2}^{1} = 9\ u^2$$