Pregunta A.1.- Un satélite de 400 kg de masa orbita alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular a una altura de 15000 km. Calcule:
a) La energía que hubo que transmitirle para ponerlo en órbita desde la superficie de la Tierra y su periodo.
b) La energía mínima que hay que suministrarle para que escape de la atracción gravitatoria terrestre desde su órbita actual.
Datos: $Constante\ de\ Gravitación\ Universal\ G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$;
$Masa\ de\ la\ Tierra, M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} kg, Radio\ de\ la\ tierra, R_T = 6{,}37 \cdot 10^6 m$

a) La energía mecánica es de la forma $E_M = E_C + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$, es decir, la suma de la energía cinética y la potencial. En la superficie de la tierra valdrá $E_M = 0 - \frac{GMm}{R_T}$, donde hemos usado el que la velocidad sea 0, ya que está en reposo, y en la órbita, $E_M = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R_T+h} - \frac{GMm}{R_T+h} = -\frac{GMm}{2(R_T+h)}$, donde h es la altura y hemos usado la fórmula de la velocidad orbital, $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$. Con esto, la energía que tengamos que darle será la energía que tiene en la órbita menos la que ya tenía en la tierra, es decir,

$$\Delta E = E_f - E_i = 2{,}17 \cdot 10^{10} J$$

En cuanto al periodo, lo podemos calcular a partir de la velocidad. Sabemos que $v = \frac{2\pi r}{T}$, asi que

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 3{,}11 \cdot 10^4 s.$$

b) Procedemos como en el apartado anterior. Queremos que escape de la atracción gravitatoria terrestre, es decir, que la energía total sea nula. La energía que tiene en la órbita es la que hemos calculado anteriormente, $E_M = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_T+h}$. Por tanto, la energía que tenemos que transmitirle será $\Delta E = 0 - (-\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_T+h}) = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R_T+h} = 3{,}76 \cdot 10^9 J$.

Pregunta A.2.- Una onda transversal se propaga en el sentido negativo del eje x con una velocidad de 2 m/s . En el instante inicial y en el origen (x = 0), la elongación es nula y la velocidad de oscilación es −40 π cm/s . Sabiendo que la separación entre dos puntos que oscilan en fase es de 50 cm, determine:
a) La amplitud y la frecuencia de la onda.
b) La expresión matemática de la onda.

En primer lugar, el que dos puntos que oscilen en fase estén a una distancia de 50cm implica que la longitud de onda será 50cm: cuando uno esté en un pico el otro, que está en fase, estará en un pico también. Por otro lado recordamos que la velocidad de propagación se relaciona con la longitud de onda y la frecuencia con $v = f\lambda$, por lo que $f = v/\lambda = 4s^{-1}$.

Por otro lado, recordamos que la elongación y la velocidad de oscilación se pueden relacionar mediante $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}$.
En nuestro caso nos dicen que cuando la elongación es nula la velocidad de oscilación es -40π.
Recordando que $\omega = 2\pi f = 8\pi\ rad/s$, tenemos

$$v = -\omega\sqrt{A^2 - 0} \rightarrow A = v/\omega = 5cm.$$

b) La ecuación matemática de una onda viene dada por $y(x,t) = Asin(\omega t \pm kx + \phi_0)$. Solamente tendremos que sustituir los datos que nos dan. En primer lugar, como la onda se propaga en sentido negativo, el signo será positivo. También sabemos que la amplitud son 5cm y que $\omega = 8\pi rad/s$. Si ahora además usamos $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 4\pi\ rad/m$, tenemos

$y(x,t) = 5sin(8\pi t + 4\pi x\ + \phi_0)$, y solo nos queda por calcular la fase inicial. Para hallarla recordamos que y(0,0)=0 y que v(0,0)<0. Por tanto,

$$0 = 5sin(\phi_0) \rightarrow sin(\phi_0) = 0 \rightarrow \phi_0 = 0, \pi.$$

¿Como sabemos si es 0 o pi? La velocidad de oscilación es $v(x,t) = A\omega cos(\omega t + kx + \phi_0)$ asi que $A\omega cos(\phi_0) < 0\ \rightarrow cos(\phi_0) < 0\ \rightarrow \phi_0 = \pi$. Y con eso ya tenemos todo:

$$y(x,t) = 5sin(8\pi t + 4\pi x\ + \pi)\text{cm}$$

Pregunta A.3.- Una corteza esférica hueca de radio 3 cm y centrada en el origen de coordenadas está cargada con una densidad superficial homogénea de carga σ = 2 μC m-2 .
a) Calcule el campo eléctrico en los puntos (0,01, 0,01, 0) m y (2, 3, 0) m.
b) Obtenga el trabajo realizado por el campo eléctrico para trasladar una partícula de carga 1 nC desde el punto (0, 2, 0) m al punto (3, 0, 0) m.
Datos: $Constante\ de\ la\ ley\ de\ Coulomb, K = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$

Recordamos que, por el teorema de Gauss, en el interior de una corteza esférica hueca no hay campo eléctrico y en el exterior se comporta como una partícula puntual con la misma carga y en el mismo centro.

a) El punto (0'01, 0'01, 0)m está en el interior de la esfera por lo que, por la discusión anterior, el campo eléctrico en ese punto será cero. El punto (2,3,0) está fuera, así que calculamos el campo eléctrico como si lo produjese una partícula de carga $Q = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$, siendo R el radio de la esfera. El punto (2,3,0) está a una distancia $r = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0} = \sqrt{13}\,m$ del origen, así que el módulo del campo eléctrico será $E = K\frac{Q}{r^2} = K\frac{\sigma 4\pi R^2}{13} = 15'66 N/C$. Si además queremos el vector, recordamos que irá en la dirección del vector (2,3,0), que, si la sacamos como un vector unitario, será $\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{\jmath}$, y el vector campo eléctrico será

$$\vec{E} = E\vec{u} = 15{,}66(\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{\jmath})N/C$$

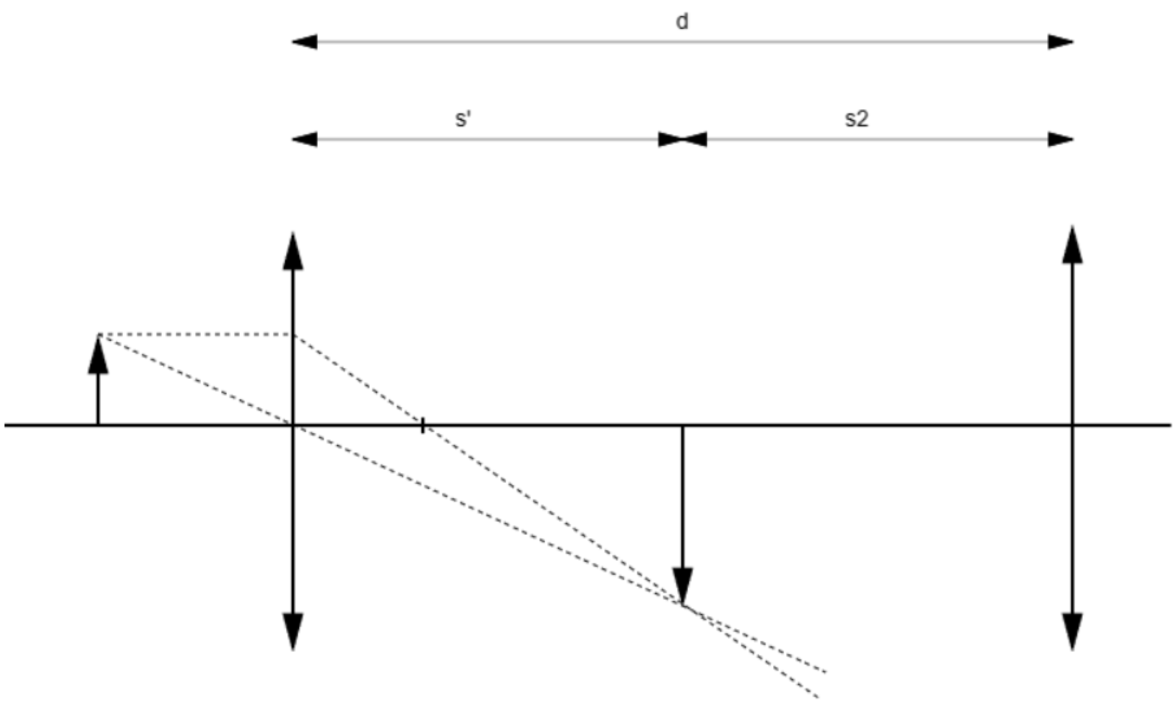
b) El trabajo realizado por el campo eléctrico al llevar una partícula desde un punto A hasta un punto B es $W = -q\Delta V = -q(V_B - V_A)$. Tenemos que calcular el potencial en los puntos A y B. Como ambos están fuera de la corteza, el potencial sería el mismo que el de una carga puntual, es decir, $V = K\frac{Q}{r}$. Con esto,

$$W = -q(\frac{KQ}{r_B} - \frac{KQ}{r_B}) = -KQq(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}) = 3{,}39 \cdot 10^{-8} J.$$

Pregunta A.4.- A una distancia de 15 cm a la izquierda de una lente se sitúa un objeto, cuya imagen se forma 30 cm a la derecha de la lente.
a) Calcule la distancia focal de la lente y el aumento lateral de la imagen.
b) Una segunda lente, de distancia focal 12 cm, se coloca a la derecha de la primera. La imagen final formada por el sistema es, con respecto al objeto original, derecha y de tamaño triple. Determine la distancia entre la primera lente y la imagen final, y elabore el trazado de rayos correspondiente.

a) En un problema de lentes la relación de la distancia entre el objeto y la lente, entre la imagen y la lente, y la distancia focal viene dada por $\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$. En nuestro caso, $s' = -15cm, s = 30cm$, así que $f' = 10cm$. El aumento lateral, por su parte, es $A = \frac{s'}{s} = \frac{30cm}{-15cm} = -2$.

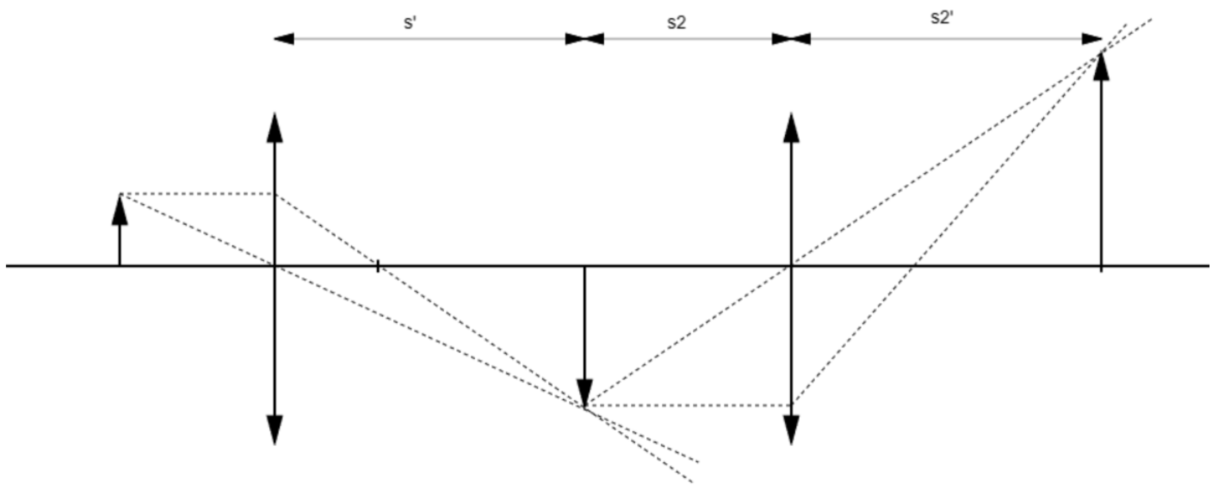
b) Cuando tenemos un sistema de dos lentes, la segunda lente actúa sobre la imagen de la primera como si fuese un objeto. Vamos a hacernos un esquema.



La imagen de la primera lente está a una distancia s_2 de la segunda, y la imagen nueva se formará a una distancia $s_2{}'$ de la lente. Ambas están relacionadas mediante $\frac{1}{s_2{}'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2{}'}$. Además, el sistema de lentes tiene 3 aumentos. Recordamos que los aumentos de un sistema de lentes son los aumentos de la primera lente por la segunda, es decir $A = A_1 A_2 = \frac{s_1{}'}{s_1}\frac{s_2{}'}{s_2}$. En nuestro caso, $3 = -2\frac{s'_2}{s_2} \rightarrow s_2 = -\frac{2}{3}s'_2$. Sustituyendo en la fórmula de las lentes,

$\frac{1}{s_2{}'} + \frac{3}{2s_2{}'} = \frac{1}{f_2{}'} \rightarrow s'_2 = 30cm \ \rightarrow s_2 = -20cm.$

Si dibujamos todo,



vemos que la distancia entre la primera lente y la imagen será

$$d = |s'| + |s_2| + |s_2'| = 80cm.$$

Pregunta A.5.- Un positrón en reposo se acelera en un acelerador lineal a través de una diferencia de potencial de 3 MV.
a) Obtenga la energía cinética y la energía relativista que alcanza el positrón.
b) Calcule la masa relativista del positrón y su velocidad tras la etapa de aceleración.
Datos: $Datos: Velocidad\ de\ la\ luz\ en\ el\ vacío, c\ =\ 3 \cdot 108\ m\ s - 1\ ;\ Carga\ del\ positrón, e\ =\ 1{,}6 \cdot 10 - 19\ C;\ \ Masa\ en\ reposo\ del\ positrón, me+ =\ 9{,}1 \cdot 10 - 31\ kg$

a) Vamos a estudiar la energía mecánica del positrón. Cuando está al principio del acelerador lineal está en reposo, por lo que su energía cinética es nula, y está en un potencial inicial V_i desconocido, por lo que $E_{Minicial} = E_c + E_P = 0 + qV_i$. Al final se estará moviendo, por lo que su energía cinética no será nula, y estará en un potencial final V_f, así que su energía mecánica final será $E_{M\ final} = E_C + E_P = E_C + qV_f$. Como entre medias la única fuerza que actúa es la del campo eléctrico, que es conservativa, la energía inicial y la final serán las mismas, así que $qV_i = E_c + qV_f \rightarrow E_c = q(V_i - V_f) = 4{,}8 \cdot 10^{-13}J$, donde hemos usado que la diferencia de potencial es de 3MV.

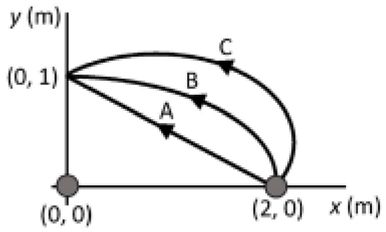
Conociendo la energía cinética podemos hallar la relativista como

$$E_{rel} = E_c + m_0c^2 = 5{,}62 \cdot 10^{-13}J.$$

b) Recordamos que la energía relativista y la energía cinética se relacionan mediante $E_c = (\gamma - 1)m_0c^2$. A partir de esto podemos sacar el valor del factor de Lorentz, $\gamma = \frac{E_c}{m_0c^2} + 1 = 6{,}86$. Una vez conocido esto podemos obtener todo lo demás: la masa es $m = \gamma m_0 =$ y la velocidad se obtiene a partir de $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow$

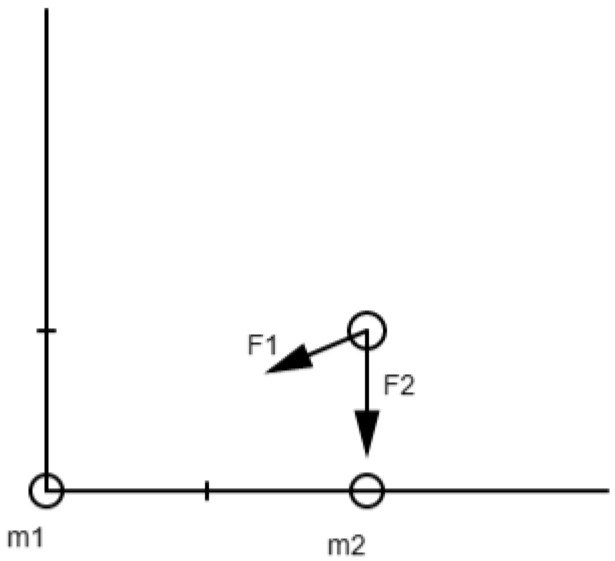
$v = 0{,}9893c$.

Pregunta B.1.- Dos masas m1 = 10 kg y m2 = 15 kg se encuentran situadas en los puntos (0, 0) m y (2, 0) m respectivamente, del plano xy.



a) Calcule la fuerza gravitatoria debida a las masas m1 y m2 que experimentará una masa de 5 kg situada en el punto (2, 1) m.
b) Halle el trabajo que realiza el campo gravitatorio creado por la masa m1 cuando la masa m2 se desplaza del punto (2, 0) m al punto (0, 1) m a través de los tres caminos representados en la figura, asumiendo que la masa de 5 kg del apartado anterior no está presente.

a) Para calcular la fuerza gravitatoria sobre una tercera masa en el punto (2,1) tenemos que calcular la fuerza sobre esa masa debida a m_1 y la debida a m_2. Una vez las tengamos, solo hay que sumarlas, por el principio de superposición.



Los módulos se pueden calcular con la ley de gravitación universal, $F = \frac{GMm}{r^2}$, obteniendo así $F_1 = 6{,}67 \cdot 10^{-10} N$, $F_2 = 5 \cdot 10^{-9} N$.
Multiplicamos ahora cada una por su vector unitario correspondiente: en el caso de$F_2, -\vec{j}$, ya que es vertical y hacia abajo, y en el de $F_{1,}\ -(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j})$, ya que va en dirección contraria al vector (2,1). Con esto ya tenemos todo:

$$\vec{F}_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-10}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) N, \vec{F}_2 = -5 \cdot 10^{-9} j, \vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \vec{F}_2 = -5{,}97 \cdot 10^{-10}\vec{\imath} - 5{,}33 \cdot 10^{-9}\vec{j}\, N.$$

b) Como la gravedad es una fuerza conservativa, el trabajo no dependerá de la trayectoria, solo del punto inicial y final. Como en este caso coinciden, el trabajo será el mismo a lo largo de las tres trayectorias. Podemos calcularlo como $W = -\Delta E_p$. En nuestro caso la energía potencial es la gravitatoria, $E_p = -G\frac{Mm}{r}$, y tenemos

$W = -(-G\frac{Mm}{r_1} + G\frac{Mm}{r_2}) = GMm(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) = 5 \cdot 10^{-9}J$. Tiene sentido que sea positivo, ya que el campo gravitatorio tiende a atraer las masas.

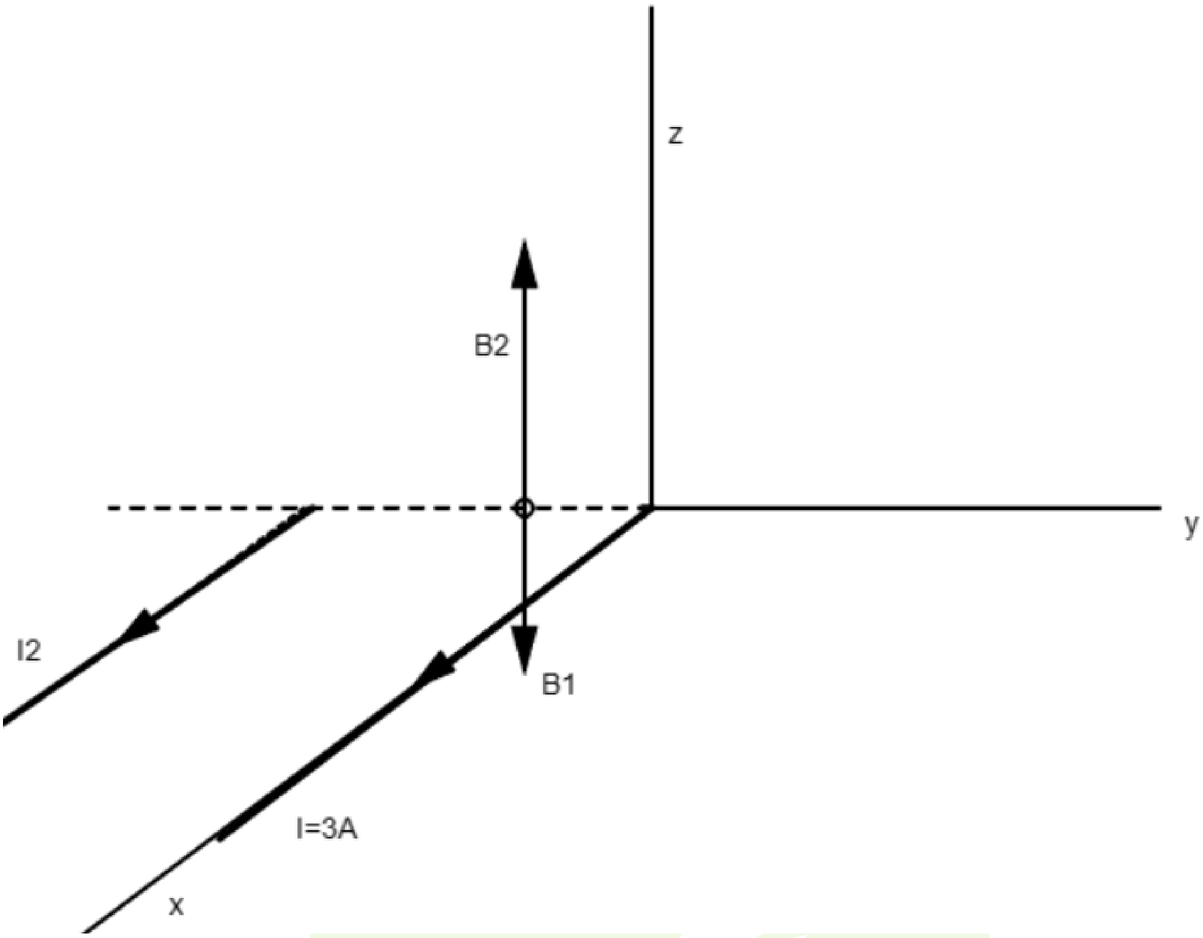
Pregunta B.2.- Un foco sonoro puntual emite ondas esféricas de forma que a una distancia desconocida x, el nivel de intensidad es de 60 dB. Sabiendo que el nivel de intensidad a una distancia x + 10 m del foco es de 47,96 dB, halle:
a) La distancia x.
b) La potencia con la que emite el foco. Dato: Intensidad umbral, I0 = 10-12 W m-2

Recordamos que el nivel de intensidad viene dado por $\beta = 10log(\frac{I}{I_0})$, donde $I = \frac{P}{4\pi r^2}$ es la intensidad. Vamos a empezar averiguando la intensidad en x y en x+10. Si despejamos en la ecuación anterior, $I = I_0 10^{\beta/10}$, así que $I_x = 10^{-6}W/m^2$ y $I_{x+10} = 6{,}25 \cdot 10^{-8}W/m^2$. A partir de aquí tenemos el sistema de ecuaciones $10^{-6} = \frac{P}{4\pi x^2}$, $6{,}25 \cdot 10^{-8} = \frac{P}{4\pi(x+10)^2}$. Si dividimos una entre otra tenemos $16 = \frac{(x+10)^2}{x^2} \rightarrow 4 = \frac{10+x}{x} \rightarrow 4x = 10 + x \rightarrow x = 10/3m$.

c) Sustituyendo x en la ecuación de la intensidad en x tenemos $10^{-6} = \frac{P}{4\pi(3{,}33)^2} \rightarrow P = 1{,}39 \cdot 10^{-4}W$.

Pregunta B.3.- Por un hilo rectilíneo infinito situado sobre el eje x circula una corriente de 3 A según el sentido positivo de dicho eje. Una segunda corriente paralela a la primera, y del mismo sentido, pasa por el punto (0, −2, 0) m.
a) Obtenga el valor de la intensidad de la segunda corriente sabiendo que el campo magnético generado por ambas es nulo en el punto (0, −0,5, 0) m.
b) Calcule la fuerza que experimentará un electrón cuando pase por el punto (0, 2, 0) m con una velocidad $\vec{v} = 5 \cdot 10^{-6}\ i\ m/s$. ¿Qué velocidad, no nula, debería llevar el electrón para que la fuerza que experimentase al pasar por ese mismo punto fuese nula?

En primer lugar vamos a hacernos un croquis de la situación: tenemos dos corrientes paralelas y nos hablan del campo magnético en un punto entre ambas. En ese punto el campo magnético será la suma de dos campos, el producido por la corriente 1, B1, y el producido por la corriente 2, B2, cuyos sentidos, obtenidos por la regla de la mano derecha, son los del dibujo.



El campo B1 será

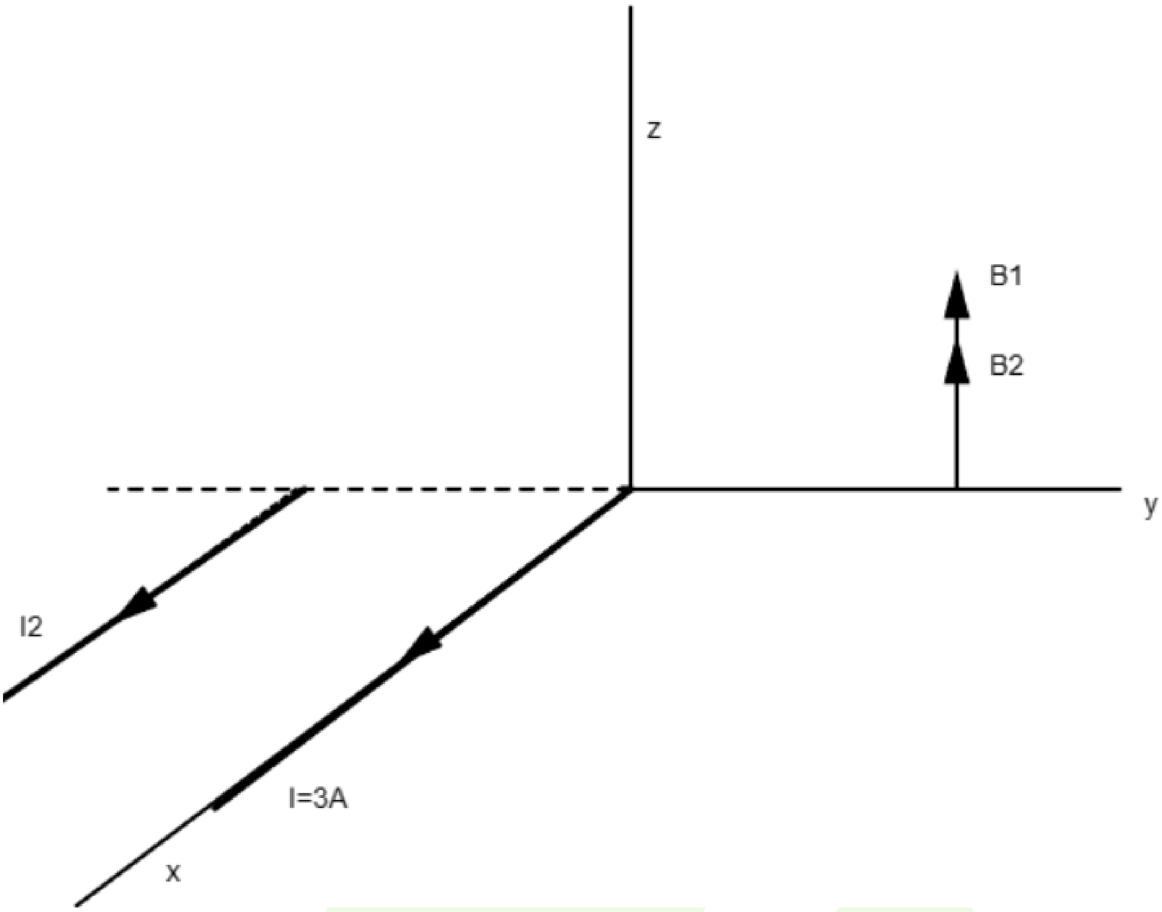
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{4\pi 10^{-7} 3}{2\pi 0{,}5} = 12 \cdot 10^{-7} T \;\rightarrow \vec{B}_1 = 12 \cdot 10^{-7}(-\vec{k})T$$

donde el sentido lo hemos elegido por el dibujo, y el campo B2 será

$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} = \frac{4\pi 10^{-7} I_2}{2\pi 1{,}5} = \frac{4}{3} I_2 10^{-7} T \rightarrow \overrightarrow{B_2} = \frac{4}{3} I_2 10^{-7}(\vec{k})T$. La suma de ambas tiene que ser el campo total, $\vec{B} = 0$, por lo que

$$(\frac{4}{3} I_2 - 12) \cdot 10^{-7} T\,\vec{k} = 0 \rightarrow \frac{4}{3} I_2 = 12 \rightarrow I_2 = 9A.$$

b) Recordamos que cuando una carga q se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$ experimenta una fuerza, la fuerza de Lorentz, dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. En nuestro caso conocemos la carga, la velocidad, y nos falta por conocer el campo B en el punto que nos interesa, (0,2,0). En ese punto el campo magnético de ambos cables va en el mismo sentido, como en el dibujo, por lo que solo tenemos que sumar los módulos:



Si los calculamos,
$\vec{B} = \overrightarrow{B_1} + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{k} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{k} = 7{,}5 \cdot 10^{-7}\vec{k}T$. Conocido ésto, calculamos la fuerza:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} 5 \cdot 10^{6}\vec{\imath} \times 7{,}5 \cdot 10^{-7}\vec{k} \; = \; 6 \cdot 10^{-19}\vec{\jmath}N.$$

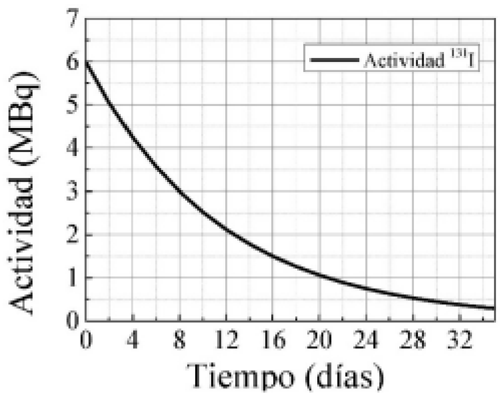
Por último, queremos saber qué velocidad no nula debería llevar el electrón para no experimentar ninguna fuerza. Sabemos que el producto vectorial de dos vectores es nulo si son paralelos o antiparalelos, por lo que si $\vec{v}$ es paralelo o antiparalelo a $\vec{B}$, $F = q\vec{v} \times \vec{B} = 0$. Por lo tanto, necesitaremos que el electrón fuese en el sentido del eje z.

Pregunta B.4.- Sean dos medios A y B de índices de refracción n_A, n_B, respectivamente. Si un rayo de luz de frecuencia $f = 2{,}94 \cdot 10^{14} Hz$ incide desde el medio A hacia el medio B, éste se refleja totalmente en la superficie de separación para un ángulo de incidencia igual o superior a 49,88°. Por otro lado, las velocidades de propagación del haz en los medios A y B, v_A, v_B, respectivamente, verifican la relación $v_A + v_B = 4{,}07 \cdot 10^{8} m/s$. Determine:
a) Los índices de refracción n_A, n_B.
b) Las longitudes de onda del rayo incidente en los medios A y B.

a). En primer lugar sabemos que el ángulo límite al pasar de A a B es de 49,88°, por lo que, según la ley de Snell, $n_A sin(49{,}88) = n_B sin(90º) \rightarrow 0{,}76 n_A = n_B$. En segundo lugar, los índices de refracción se relacionan con la velocidad en el medio mediante la fórmula $n = c/v$, siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Con eso, $v_A = c/n_A, v_B = c/n_B$, y tenemos $c(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}) = 4{,}07 \cdot 10^8 m/s$. Combinando esta ecuación con la anterior, $\frac{1}{n_A} + \frac{1}{0{,}76 n_A} = 1{,}36\ \rightarrow n_{:A} = 1{,}7 \rightarrow n_B = 0{,}76 \cdot 1{,}7 = 1{,}3$.

d) La longitud de onda en un medio viene dada en función de la velocidad de la luz en el medio y de la frecuencia como $\lambda = v\ \ /f$. La velocidad en el medio es c/n , así que $\lambda_A = \frac{c}{n_A f} = 600nm$, $\lambda_B = \frac{c}{n_B f} = 784nm$.

Pregunta B.5.- En la figura se presenta la evolución temporal de la actividad de una muestra que contiene Yodo-131 (131I).
a) Halle el tiempo de semidesintegración del isótopo de 131I y su constante de desintegración radiactiva.
b) Calcule el número de núcleos iniciales del isótopo y la masa de 131I que quedará en la muestra al cabo de 60 días.
Datos: Masa atómica del 131I, M131-I = 131 u; Número de Avogadro, NA = 6,02·1023 mol-1



a) El tiempo de semidesintegración se define como el tiempo que tarda la muestra en reducirse a la mitad. Recordando que la actividad es proporcional a la muestra $A = \lambda N$, vemos que, pasado un tiempo de semidesintegración, la actividad se habrá reducido a la mitad. Mirando la gráfica vemos que la actividad inicial es de 6MBq y que se reduce a la mitad, 3MBq, después de 8 días. Por lo tanto ése será el periodo de semidesintegración.
En cuanto a la constante de desintegración, sabemos que se relaciona con el tiempo de semidesintegración con la fórmula $\lambda = \frac{ln2}{T_{1/2}} = 8{,}6 \cdot 10^{-2} días$.

b) Como dijimos antes, la actividad y el número de núcleos se relacionan mediante $A = \lambda N$, por lo que el número de núcleos iniciales sería $N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = 6 \cdot 10^{12} núcleos$. Después de 60 días quedarán $N = N_0 e^{-\lambda t} = 6 \cdot 10^{12} e^{-8{,}6 \cdot 10^{-2} 60} = 3{,}38 \cdot 10^{10}$. A partir de ahí podemos sacar la masa con $m = \frac{N}{N_A} M = \frac{3{,}38 \cdot 10^{10}}{6{,}023 \cdot 10^{23}} 131 = 7{,}35 \cdot 10^{-12} g$.