



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2019-2020**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

- a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
- b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
- c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
- d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
- e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

- a) (0.5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.
- b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
- c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3, 3, 0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
- b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r .
- c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A .

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A , B y C . La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
- b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
- c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

- (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A .
- (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.
- (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

- (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
- (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
- (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t , $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

- (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.
- (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores \vec{AB} y \vec{AC} .

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y . Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \bar{Y}) = 0.08$ (donde \bar{Y} es el suceso complementario de Y). Se pide:

- (1 punto) Calcular $P(Y)$.
- (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.
- (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X , y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

En cada apartado, por dar el ejemplo 0.25 puntos; por la justificación de que cada ejemplo cumple el enunciado, 0.25 puntos.

Estándares evaluables: Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

A.2.

a) Por cada valor obtenido: 0.25 puntos.

b) Por el estudio de la continuidad: 0.5 puntos. Por el estudio de la derivabilidad: 0.5 puntos. Por caracterizar el extremo: 0.25 puntos.

c) Por cada asíntota: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

c) Planteamiento: 0.5 puntos. Encontrar una solución correcta: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

- 1a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

B.2.

- a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo de límite: 0.25 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo del instante: 0.25 puntos. Cálculo del máximo: 0.25 puntos.
- c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B.3.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Si se determina el vértice D : 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25). Si se determina el área: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25).
- c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

B.4.

- a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) 0.5 puntos por identificar la binomial; 0.5 puntos por el resultado.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

MATEMÁTICAS II-SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

- a) Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- c) Sirve el ejemplo de b) d) Sirve el ejemplo de a)
- e) Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A.2.

- a) Evaluando $f(0) = 1$ y $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = 1/2$.
- b) Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = f(1) = \frac{1}{2}$, $f(x)$ continua en $x = 1$.
- Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{4} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{4x^2} = 0$, $f(x)$ no derivable en $x = 1$. En $x = 1$, $f(x)$ pasa de decreciente a creciente luego en $x = 1$ hay un mínimo relativo.
- c) Asíntota horizontal $y=0$ si $x \rightarrow -\infty$, asíntota vertical $x = -1$ y asíntota oblicua $y = \frac{x}{4}$ si $x \rightarrow \infty$.

A.3.

- a) La recta r pasa por el punto $C(2, 0, -1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1, 0)$. El plano que nos piden pasa por el punto C y tiene vectores directores \vec{v} y $\vec{CP} = (1, 3, 1)$. Su ecuación será $x + y - 4z - 6 = 0$.
- b) La proyección O del punto P sobre la recta r se halla intersecando r con el plano de vector normal \vec{v} que pasa por P . Dicho plano es $-x + y = 0$, y al cortarlo con

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

obtenemos el punto $O(1, 1, -1)$. Si P' es el simétrico a P respecto de r , se tiene $\vec{PO} = \vec{OP}'$, es decir $P' = 2O - P = (2, 2, -2) - (3, 3, 0) = (-1, -1, -2)$.

- c) Si tomamos $A = O = (1, 1, -1)$, tendremos que el triángulo ABP será rectángulo en A , y su altura será $|\vec{AP}| = |(2, 2, 1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$. Por tanto, basta tomar como B un punto de r a distancia $\sqrt{2}$ de A . Como $|\vec{v}| = |(1, -1, 0)| = \sqrt{2}$, una posible solución sería $B = A + \vec{v} = (0, 2, -1)$ (la otra solución sería $B' = A - \vec{v} = (2, 0, -1)$).

A.4.

- a)
- | | | |
|--------------------------------|--------------|----------------|
| $R \equiv$ primera bola roja. | $P(A) = 1/3$ | $P(R A) = 2/3$ |
| $N \equiv$ primera bola negra. | $P(B) = 1/3$ | $P(R B) = 1/2$ |
| $A, B, C \equiv$ urna. | $P(C) = 1/3$ | $P(R C) = 0$ |

$$P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) + P(R|C) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}.$$

- b) Análogamente al apartado anterior, $P(RN|A) = (4/6)(2/5) = 4/15$, $P(RN|B) = (3/6)(3/5) = 3/10$, $P(RN|C) = 0$, de modo que

$$P(RN) = P(RN|A) \cdot P(A) + P(RN|B) \cdot P(B) + P(RN|C) \cdot P(C) = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{90}.$$

- c) Basta escribir $P(N_2|R_1) = \frac{P(RN)}{P(R)} = \frac{17/90}{7/18} = \frac{17}{35}$.

También puede razonarse de la manera siguiente: Dado que la primera bola es roja, la urna elegida no es la C . Las probabilidades respectivas de que se trate de la urna A o de la B se obtienen mediante el teorema de Bayes:

$$P(A|R) = \frac{P(R|A) \cdot P(A)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}; \quad P(B|R) = \frac{P(R|B) \cdot P(B)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}$$

Si la urna elegida fue la A , quedan 3 rojas y 2 negras. Si fue la B quedan 2 rojas y 3 negras. La probabilidad de que la segunda sea negra (sabiendo que la primera fue roja) es, por tanto, $P(N_2|R_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{17}{35}$.

B.1.

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } |ABB^t| = |A||BB^t|$$

$$BB^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |BB^t| = 0 \rightarrow |ABB^t| = 1 \cdot 0 = 0$$

B.2.

a) Dado que $\lim_{x \rightarrow \infty} 25t e^{-t^2/4} = 0$ (por ejemplo, aplicando la Regla de L'Hôpital), la potencia tiende a 0.

b) Como $P'(t) = \frac{25}{2}(2-t^2)e^{-t^2/4}$, $P(t)$ presenta un extremo en $t = \sqrt{2}$ pasando de creciente a decreciente luego es un máximo relativo. Así $P_{max} = P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}e^{-1/2} \approx 21.44$.

$$\text{c) } E(2) = \int_0^2 P(t) dt = \left[-50e^{-t^2/4} \right]_0^2 = \boxed{50 - 50/e \approx 31.61}.$$

B.3.

a) El punto medio de AC es $M_{AC}(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2})$. $\overrightarrow{AC}(3, 3, -1)$ y $\overrightarrow{BC}(2, 2, -2)$ y por tanto el vector director de la recta buscada es $\overrightarrow{d}_r = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = (-4, 4, 0)$ que es paralelo al vector $(-1, 1, 0)$. La ecuación vectorial de la recta r

buscada es: $r : (x, y, z) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}) + \lambda(-1, 1, 0) \Rightarrow$ las ecuaciones implícitas de r son:
$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

b) El vértice D es el simétrico de B con respecto al punto medio de $AC \Rightarrow (\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2})$ y por consiguiente, el vértice D es $D = A + \overrightarrow{BC} = (3, 2, -3)$. El área del paralelogramo es: $A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

$$\text{c) } \cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{5}{\sqrt{57}}.$$

B.4.

a) Al ser X e Y independientes, tenemos que

$$0.08 = P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) = P(X) - P(X)P(Y) = 0.4(1 - P(Y)) \Rightarrow 1 - P(Y) = 0.2 \Rightarrow P(Y) = 0.8.$$

$$\text{b) } P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X)P(Y) = 0.8 + 0.4 - 0.32 = 0.88.$$

c) Se trata de 8 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = P(\overline{X}) = 1 - 0.4 = 0.6$, y queremos hallar la probabilidad de tener al menos 2 éxitos (llamamos n al número de éxitos):

$$P(n \geq 2) = 1 - P(n = 0) - P(n = 1) = 1 - \binom{8}{0}0.6^00.4^8 - \binom{8}{1}0.6^10.4^7 = 0.99148032.$$