PROFESORA: Charo Ramos Pérez

MATEMÁTICAS II. Estudio de funciones

1. Estudio de la continuidad de una función en un punto $x = a$

- $\exists\, f(a)$
- $\exists \lim_{x \to a} f(x) \to \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

2. Estudio de la derivabilidad de una función en un punto $x = a$

- Para que una función sea derivable en un punto tiene que ser contínua en ese punto.
- $\exists\, f'(a) \to f'(a^+) = f'(a^-)$

Nota: $f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$; $f'(a^-) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$

3. Estudio de la monotonía de una función. Crecimiento y decrecimiento

- Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
  - Puntos donde la función no está definida (Dominio).
  - Puntos críticos ($f'(x) = 0$).
- Criterios:
  - Función creciente: $f'(x) > 0$
  - Función decreciente: $f'(x) < 0$

4. Estudio de la curvatura de una función. Concavidad y convexidad

- Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
  - Puntos donde la función no está definida (Dominio).
  - Puntos de inflexión ($f''(x) = 0$).
- Criterios:
  - Función cóncava (U): $f''(x) > 0$
  - Función convexa (∩): $f''(x) < 0$

5. Puntos críticos de una función: Máximos, mínimos y puntos de inflexión

- Los puntos de la función donde la tangente es horizontal se denominan puntos sigulares o críticos, en estos puntos $f'(x) = 0$.
- Cálculo de las coordenadas de un máximo o mínimo relativo:
  - $f'(x) = 0 \to x = a$
  - $y = f(a) = b$
  - $x = a; y = b \to P = (a, b)$

- Cálculo de las coordenadas de un punto de inflexión:
  - $f''(x) = 0 \rightarrow x = a$
  - $y = f(a) = b$
  - $x = a; y = b \rightarrow P = (a, b)$
- Criterios:
  - Máximo relativo: $f''(a) < 0$
  - Mínimo relativo: $f''(a) > 0$
  - Punto de inflexión: $f''(a) = 0$

6. Ramas infinitas. Asíntotas

6.1. Ramas infinitas en el infinito. Asíntota horizontal

- Hay una asintota horizontal en $y = b$ cuando $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$.
- Posición de la función con respecto a la asíntota:
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b^{\pm}$
  - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b^{\pm}$

6.2. Ramas infinitas en el infinito. Asíntota oblicua

- Hay una asintota oblicua de ecuación $y = mx + n$ cuando $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.
- Cálculo de m y n:
  - $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$
  - $n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$
- Posición de la función con respecto a la asíntota:
  - $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = \pm\infty$
  - $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = \pm\infty$

6.3. Ramas infinitas en un punto. Asíntota vertical

- Hay una asintota horizontal en $x = a$ (dominio) cuando $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.
- Posición de la función con respecto a la asíntota:
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

Nota: Cuando hay asíntota horizontal no hay asíntota oblicua y viveversa.

Nota: A diferencia de las asíntotas horizontales y oblicuas, la función nunca corta a una asíntota vertical.