ÁLGEBRA

1.- DEFINICION DE EXPRESION ALGEBRAICA

Se entiende por expresión algebraica a cualquier combinación entre letras y números planteada con cualquier operación aritmética (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación,...)

Las expresiones algebraicas se clasifican de la siguiente forma:

A.- Enteras: cuando las letras no aparecen en el denominador o bajo el signo radical.

Ej.: $6a^3 + 5b - 7pq$

B.- Fraccionarias: cuando existen letras que aparecen en el denominador.

Ej.: $\frac{6a}{5p} + 1$

C.- Irracionales: cuando existen letras que aparecen bajo el signo radical.

Ej.: $3ab - 5p + 7\sqrt[3]{a}$

Se entiende por **término** de una expresión algebraica a cada una de las expresiones que van separadas del resto por signos + ó -.

Ej.: En la expresión algebraica $2a^3b - 5a + 3pq - 7$. Son términos $2a^3b$, $-5a$, $3pq$, -7

Se entiende por **coeficiente de un término** al número que está situado delante de las letras de cada término.

Ej.: El coeficiente del término $2a^3b$**,** es 2.

Se llama **valor numérico** de una expresión algebraica al número que resulta de sustituir cada letra de la expresión algebraica por un número.

Ej.: Hallar el valor numérico de $a^2 - 3ab + 5$ cuando $a = 1$ y $b = 2$. El valor numérico es: $1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 5 = 0$

2 .- MONOMIOS Y POLINOMINOS

Se entiende por **MONOMIO** a un conjunto de letras y números, ligados por la operación de multiplicar o dividir, también a cualquier término de una expresión algebraica.

Ej.: $7a^3b$

Parte literal de un monomio es el conjunto de todas sus letras.
Coeficiente de un monomio es el número que indica las veces que se repite su parte literal
Grado de un monomio es la suma de los exponentes de todas sus letras.

Ejemplo:
$3a^3 b^2 c$ Parte literal = $a^3 b^2 c$ Coeficiente = 3 Grado de monomio = 3 + 2+ 1 = 6

Se entiende por **POLINOMIO** a cualquier conjunto de monomios ligados por los signos + ó -, es decir, a cualquier expresión algebraica.

Ej.: Es un polinomio: $3a^3 b + 5ab - 7a + 5$

Grado de un polinomio es el grado de su mayor monomio.

Ej.: Hallar el grado del polinomio: $3a^5b - 5a^6b + 3ab - 6$

Grado de $3a^5b = 5 + 1 = 6$
Grado de $- 5a^6b = 6 + 1 = 7$
Grado de $3ab = 1 + 1 = 2$
Grado de $- 6 = 0$

Luego, como el grado de un polinomio es el grado de su mayor monomio, el grado del polinomio es 7.

Coeficiente principal de un polinomio es el coeficiente del monomio de mayor grado del polinomio.

Polinomio ordenado es aquel que tiene dispuestos sus términos o monomios de mayor a menor grado o de menor a mayor grado indistintamente.

3.- OPERACIONES CON POLINOMIOS

SUMA

Para sumar polinomios debemos sumar entre sí los monomios semejantes (los que tienen la misma parte literal) y únicamente éstos, ya que son los que pueden agruparse. Los monomios que no sean semejantes se ponen en el polinomio suma tal como aparecían antes de la suma.

Ejemplo:
Sean los polinomios: $A(x) = 8x + 12x^2y – 7$ y $B(x) = x – 3x^2y + 5y – 1$
El polinomio suma es:

$$8x + 12x^2y – 7$$
$$x – 3x^2y + 5y – 1$$
$$S(X) = 9x^2y + 9x + 5y – 8$$

DIFERENCIA

El procedimiento es el mismo que el de la suma, sólo hay que tener en cuenta que el signo negativo va a producir un cambio de signo en todos los monomios del segundo polinomio o sustraendo, manteniéndose el primer polinomio o minuendo tal como nos los presentan.

Ejemplo:

$A(x) = 6x^4 – 5x^3 + 2x^2 + 6$ y
$B(X) = 3x^4 + 2x^3 – 5x^2 + x – 5$
El polinomio resta será:

$$6x^4 – 5x^3 + 2x^2 + 6 - (3x^4 + 2x^3 – 5x^2 + x – 5) =$$

$$6x^4 – 5x^3 + 2x^2 + 6 - 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 5$$

$$R(X) = 3x^4 - 7x^3 + 7x^2 - x + 11$$

MULTIPLICACION DE MONOMIOS Y POLINOMIOS

El producto de monomios se basa en el producto de potencias de la misma base. Primero se multiplican los números y luego las letras.

Ejemplo:
$5x^2 \cdot 7x^5 = (5 \cdot 7)\ (x^{2+5}) = 35\ x^7$

Para multiplicar polinomios lo que hacemos es multiplicar cada uno de los monomios de uno de los polinomios por todos los monomios del otro polinomio.

Al efectuar el producto de monomio a monomio, multiplicaremos primero los signos de éstos (utilizando el criterio de signos para el producto), luego sus coeficientes y después sus partes literales.

Ejemplo:

Multiplicar los polinomios $A(X) = 5x^2 + 3x + 2$ y $B(X) = 3x^2 – 2x - 1$.

$$
\begin{array}{lrrrrr}
 & & & 5x^2 & +\ 3x & +\ 2 \\
\times & & & 3x^2 & -\ 2x & -\ 1 \\
\hline
 & & & -5x^2 & -\ 3x & -\ 2 \\
 & & -10x^3 & -\ 6x^2 & -\ 4x & \\
 & 15x^4 & +\ 9x^3 & +\ 6x^2 & & \\
\hline
 & 15x^4 & -\ x^3 & -\ 5x^2 & -\ 7x & -\ 2
\end{array}
$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

COCIENTE DE MONOMIOS

El **cociente de un monomio por otro monomio de grado inferior** es un nuevo monomio cuyo grado es la diferencia de los grados de los monomios que se dividen.

TÉCNICA DE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Si tenemos la siguiente división:

$$P(x) = -2x^3 + x^4 - 20 - 11x^2 + 30x \qquad Q(x) = 3x + x^2 - 2$$

1º) Ordenamos los términos del dividendo y del divisor y los dispondremos como una división normal.
En el dividendo, dejamos huecos en los términos que faltan.

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \ \underline{\big|\ x^2 + 3x - 2}$$

2º) Se divide el primer término del dividendo con el primer término del divisor, así se obtiene el primer término del cociente.

$$\begin{array}{lllll|l} x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\ \hline -x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2+3x-2 \\ \times x^2 \\ \hline x^4+3x^3-2x^2 \end{array}$$

3º) Se multiplica el primer término del cociente por cada término del divisor y el producto pasa restando al dividendo.

4º) Se suman algebraicamente

$$\begin{array}{lllll|l} x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\ \hline -x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2-5x \\ \hline & -5x^3 & -9x^2 & +30x & -20 & \\ & 5x^3 & +15x^2 & -10x & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2+3x-2 \\ \times\ -5x \\ \hline -5x^3-15x^2+10x \end{array}$$

5º) Se divide el primer término del nuevo residuo, entre el primer término del divisor, así obtenemos el segundo término del divisor. Este segundo término se multiplica por el divisor y se pasa restando al dividendo.

6º) Se repite el procedimiento hasta que el grado del polinomio resto sea menor que el grado del polinomio divisor

$$\begin{array}{lllll|l} x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\ \hline -x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2-5x+6 \\ \hline & -5x^3 & -9x^2 & +30x & -20 & \\ & 5x^3 & +15x^2 & -10x & & \\ \hline & & 6x^2 & +20x & -20 & \\ & & -6x^2 & -18x & +12 & \\ \hline & & & 2x & -8 & \end{array}$$

Solución = D(x) : d(x) = C(x) + $\boldsymbol{\frac{R(x)}{d(x)}}$

DIVISIÓN ENTERA Y DIVISIÓN EXACTA

A la división entre polinomios en la que, además del cociente, hay un resto, se le llama **división entera:**

$$D(x) : d(x) = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

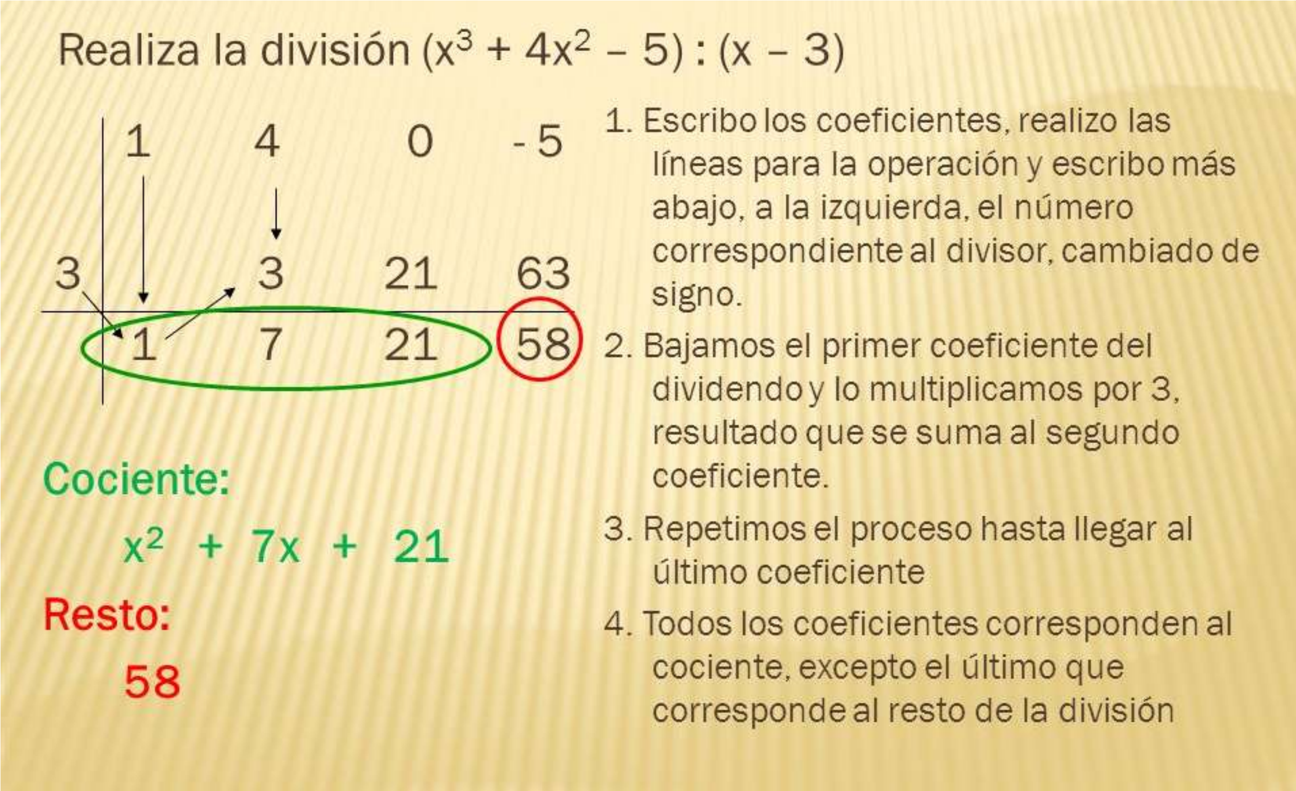
Cuando el resto es cero, se dice que la división es **exacta**: **D(x) : d(x) = C(x)**

DIVIDIR UN POLINOMIO POR x – a. REGLA DE RUFFINI

La regla de Ruffini sirve para dividir un polinomio por x – a

Ejemplo:

$D(x) = x^3 + 4x^2 – 5$ $\qquad d(x) = x - 3$



VALOR DE UN POLINOMIO PARA x = a

El valor numérico de un polinomio, P(x), para x = a, es el número que se obtiene al sustituir la x por a y efectuar las operaciones indicadas. A ese número se le llama P(a).

<u>TEOREMA DEL RESTO</u>

El valor que toma un polinomio, P(x), cuando hacemos x = a, coincide con el resto de la división P(x) : (x – a). Es decir, P(a) = r

<u>FACTORIZACIÓN UN POLINOMIO</u>

PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR UN POLINOMIO

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios (factores) del menor grado posible.
Método para factorizar un polinomio:
· Sacar factor común
· Recordar los productos notables
· Si es un polinomio de grado > 2: Por Ruffini, probando con los divisores del término independiente, hasta obtener resto cero: P(x) = (x – a).C(x)
· Si es un polinomio de grado = 2: Se resuelve la ecuación de segundo grado:

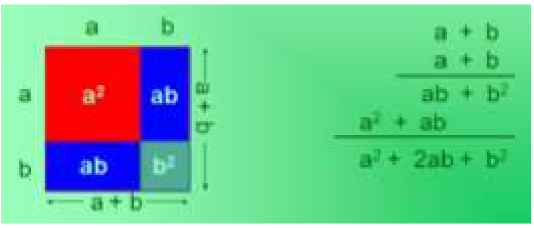
$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} 2\ soluciones\ distintas\ \rightarrow a \cdot (x - x_1)(x - x_2) \\ 1\ solución\ doble\ \rightarrow\rightarrow a \cdot (x - x_1)^2 \\ No\ tiene\ solución\ \rightarrow\rightarrow ax^2 + bx + c \end{cases}$$

DESARROLLO POLINÓMICOS NOTABLES

A.- Cuadrado de una suma polinómica

El resultado o desarrollo del cuadrado de una suma equivale al cuadrado del primer término más el cuadrado del segundo término más el doble del primer término por el segundo término:

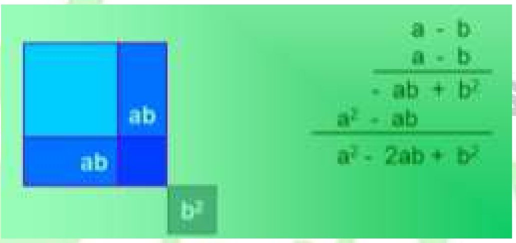
$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.



B.- Cuadrado de una diferencia polinómica

El desarrollo del cuadrado de una diferencia equivale al cuadrado del primer término más el cuadrado del segundo término menos el doble del primer término por el segundo término.

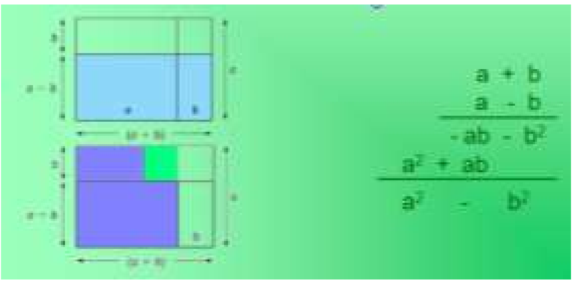
$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$



C.- Diferencia de cuadrados

Una diferencia de cuadrados equivale a una suma por una diferencia. Véase en la expresión típica.

$a^2 – b^2 = (a + b)(a - b)$



SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En general, para simplificar una expresión cualquiera, no existen métodos especiales, nos vale el conocimiento de cálculo.

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es dividir numerador y denominador por un mismo polinomio no nulo.

Ejemplo:

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

Una fracción es irreducible cuando no puede simplificarse más. En este caso decimos que numerador y denominador son polinomios primos entre sí.

Reducción de fracciones a común denominador.

Reducir dos o más fracciones a común denominador es hallar otras fracciones, equivalentes a las primeras, que tengan todas ellas el mismo denominador.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. NÚMERO DE SOLUCIONES

Una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

Número de soluciones: Llamamos discriminante $D = b^2 - 4ac$

· Si $D > 0 \Rightarrow$ Dos soluciones distintas
· Si $D = 0 \Rightarrow$ Una solución doble
· Si $D < 0 \Rightarrow$ No tiene solución

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\begin{matrix}\to x_1\\ \to x_2\end{matrix}\quad\to\quad\begin{matrix}\text{Soluciones}\\ \text{Raices}\\ \text{Ceros}\end{matrix}}$$

Si la ecuación es **incompleta**:

Si $b = 0 \rightarrow ax^2 + c = 0$ Se despeja x^2 y luego se hace la raíz
Si $c = 0 \rightarrow ax^2 + bx = 0$ Se saca factor común la x y luego cada uno de los productos se iguala a cero y se obtienen las soluciones.

ECUACIONES BICUADRADAS

Son las ecuaciones cuya forma es: $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Se hace un cambio de variable $x^2 = t$
Se resuelve la ecuación de segundo grado en t
Se calcula las x como la raíz de t

Ejemplo:
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

La reduciremos a una de 2º grado mediante el cambio citado

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \ \rightarrow \begin{Bmatrix} x^2 = p \\ x^4 = p^2 \end{Bmatrix} \rightarrow p^2 - 13p + 36 = 0$$

Resolvemos la ecuación de 2º grado que sale:

p = $\frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 9 \\ x = 4 \end{cases}$

Luego, deshacemos el cambio hecho anteriormente:

$$x^2 = p \begin{cases} x^2 = 9 & \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ x^2 = 4 & \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \end{cases}$$

ECUACIONES RADICALES

Son aquellas ecuaciones en las que aparecen radicales. Se resuelven generalmente elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación, con el objetivo de eliminar los radicales y reducirlas a otro tipo de ecuaciones ordinarias.

Distinguiremos dos casos:

- Cuando existe un sólo radical

En este caso aislaremos el radical en uno de los miembros, pasando los demás términos al otro miembro y elevando al cuadrado.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $\sqrt{x^2 - 13} + x - 13 = 0$

Aislamos el radical en un miembro: $\sqrt{x^2 - 13}$ = 13 – x

Elevamos todo al cuadrado: $\left(\sqrt{x^2 - 13}\right)^2 = (13 - x)^2$

$x^2 - 13 = 169 + x^2 - 26x$

Pasamos las x a un lado: $x^2 - x^2 + 26x = 169 + 13$

Operamos: 26x = 182

Despejamos y resolvemos: x = $\frac{182}{26}$ = 7

- Cuando existen dos o más radicales

Elevamos al cuadrado tal como nos presenten la ecuación y tantas veces como sea necesario hasta que se reduzca al caso anterior y sólo aparezca un radical.

Ejemplo:
Resolver: $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$

$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5 \rightarrow \sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{x} \rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x}\right)^2 \rightarrow x + 5 = 25 + x - 10\sqrt{x}$

$10\sqrt{x} = 20 \rightarrow \sqrt{x} = 2 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = 2^2 \rightarrow x = 4.$

ECUACIONES POLINÓMICAS CON RAÍZ ENTERA

Si se conoce una solución r de la ecuación polinómica P(x) = 0, entonces se puede factorizar:
P(x) = (x –r) q(x) = 0.
Para factorizar podemos utilizar la técnica de Ruffini
Las posibles soluciones son los divisores del término independiente:

Ejemplo:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
Posibles raíces: $\pm 1\, y\, \pm 2$
Haciendo Ruffini se llega a las soluciones: (x - 1) → x = 1; (x – 2) → x = 2; (x + 1) → x = -1.

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones exponenciales son aquellas en la que la incógnita está en el exponente.

- Si se pueden poner todos en función de la misma base: $a^x = a^y \Rightarrow x = y$
- Si no se pueden poner todos en función de la misma base: Aplicar la definición de logaritmo:
  $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$
- Si hay sumas: Cambio de variable $a^x = t$
  Resolver la ecuación en t
  Calcular la x

a) Si las bases de la potencias son iguales o se puede conseguir que sean iguales, se identifican directamente los exponentes de ambos miembros.
Ejemplo:

Resolver $3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$

Ejemplo.: Resolver $27^x = 81 \rightarrow 3^{3x} = 3^4 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = 4/3$
b) Si las bases de las potencias no son iguales, se hace necesario tomar logaritmos en la ecuación, para poder despejar la incógnita.

Ejemplo: Resolver $20^x = 2$

En esta ecuación las bases no son iguales, ni se puede conseguir que lo sean, luego la única forma de despejar la x es tomando logaritmos y utilizando la calculadora. Veamos:

$20^x = 2 \rightarrow \lg 20^x = \lg 2 \rightarrow x \lg 20 = \lg 2 \rightarrow x = \frac{\lg 2}{\lg 20} \rightarrow x = \frac{0'3010}{1'3010} = 0'2313$

<u>**Ecuaciones exponenciales avanzadas**</u>:

Son aquellas en donde las potencias exponenciales se están sumando o restando entre sí, y no existe forma de agruparlas, o se presentan formando sistemas.

La táctica de cálculo se puede resumir de dos formas:

a) **Si las bases de las potencias donde está la incógnita son iguales o se puede conseguir que lo sean,** se efectúa un cambio de variables, con lo que la ecuación exponencial, adopta formas ya conocidas en el cálculo operativo. Luego se deshace el cambio y se obtienen ecuaciones exponenciales elementales.

b) **Si las bases de las potencias donde está la incógnita no son iguales**, en general, el cálculo de estas exponenciales se hace por métodos aproximados.

Ejemplo:

Resolver $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

$$(2^2)^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0 \rightarrow 2^{2x+2} + 2^{x+3} - 320 = 0 \rightarrow 2^{2x} \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0$$

Se hace un cambio para pasar de una ecuación exponencial a una elemental:
$2^x = p$; $2^{2x} = p^2 \rightarrow p^2 \cdot 2^2 + p \cdot 2^3 - 320 = 0 \rightarrow 4p^2 + 8p - 320 = 0 \rightarrow p = 8$ y $p = -10$

Deshacemos el cambio:
$2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3 \rightarrow x = 3$
$2^x = -10 \rightarrow \lg 2^x = \lg -10 \rightarrow$ No hay solución dentro de los números reales.

Ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo.

Utilizar las propiedades de los logaritmos:
$\log a^k \rightarrow k \log a$
$\log a + \log b = \log (a.b)$
$\log a - \log b = \log (a/b)$

Siempre hay que comprobar las soluciones en la ecuación inicial teniendo el cuenta que el dominio de un logaritmo es $[0,+\infty)$ [$\log (f(x)) \Rightarrow f(x) > 0$]

La resolución de una ecuación logarítmica consiste en reducir éstas a "ecuaciones de las que sabemos resolver" (ecuaciones polinómicas), es decir en reducirlas a ecuaciones en las que no aparezcan logaritmos.

La forma más conveniente para que desaparezcan los logaritmos, es agrupando éstos hasta llegar a expresiones elementales que permitan tal eliminación.

Ejemplo.:

Resolver la ecuación $\lg (2x+7) - \lg (x-1) = \lg 5$

Agrupando los logaritmos, vemos que la diferencia de logaritmos del primer miembro procede del logaritmo de un cociente.

$\lg(2x + 7) - \lg(x - 1) = \lg 5 \rightarrow \lg \frac{2x+7}{x-1} \lg 5$

Y llegamos a una expresión en la que se indica que "logaritmo de una cosa es igual al logaritmo de otra cosa, de donde deducimos que esa cosa es igual a la otra cosa, sin especificar ni tachar la palabra logaritmo, que ella por sí sola no posee ningún significado matemático en cuanto a cantidad o valor".

Así, obtenemos una "ecuación de las que sabemos resolver":

$\frac{2x+7}{x-1} = 5 \rightarrow 2x + 7 = 5(x - 1) \rightarrow 2x + 7 = 5x - 5 \rightarrow 12 = 3x \rightarrow x = 4$

Ejemplo:

Aplicar la definición de logaritmo a la expresión $lg_3\, 2 = x$.
La solución es $lg_3\, 2 = x \rightarrow 3^x = 2$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

$$|x - a| = b \begin{cases} x - a = b \\ x - a = -b \end{cases}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Un sistema de 2 ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas son 2 ecuaciones en las que las incógnitas representan los mismos valores. Se escriben así:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Resolver el sistema es hallar los posibles valores de x e y que verifican a la vez las dos ecuaciones.

Si el sistema tiene solución, se dice que es COMPATIBLE.
Si el sistema no tiene solución, se dice que es INCOMPATIBLE.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

A.- Método de Sustitución
Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituir ésta en la otra ecuación del sistema.

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + 4y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

PASO 1 Despejar **una** de las incógnitas de **una** de las ecuaciones

$$x = 19 - 4y$$

PASO 2 **SUSTITUIR** en **LA OTRA** ecuación

$$3x - 2y = 1 \longrightarrow 3(19 - 4y) - 2y = 1$$

PASO 3 Resolver la ecuación de primer grado obtenida

$$57 - 12y - 2y = 1$$
$$57 - 14y = 1$$
$$57 - 1 = 14y$$
$$56 = 14y$$
$$y = \frac{56}{14} = 4$$

Al final del paso 3 habremos encontrado la solución de una de las incógnitas
y = 4

PASO 4 Con la solución obtenida y la fórmula del paso 1, se calcula la otra incógnita

$$x = 19 - 4y \xrightarrow{y=4} x = 19 - 4y = 19 - 4 \cdot 4 = 19 - 16 = 3$$

Hemos encontrado la solución de la otra incógnita x = 4

$\boxed{\textit{La solución del sistema es } x = 3 \quad y = 4}$

PASO 5 Comprobamos que la solución obtenida hace ciertas LAS DOS igualdades

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ x + 4y &= 19 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\longrightarrow 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1 \longrightarrow 9 - 8 = 1 \longrightarrow 1 = 1 \\ &\longrightarrow 3 + 4 \cdot 4 = 19 \longrightarrow 3 + 16 = 19 \longrightarrow 19 = 19 \end{aligned} \Bigg\} \text{ OK}$$

B.- Método de Igualación
Consiste en despejar de las dos ecuaciones del sistema la misma incógnita e igualar las dos expresiones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y=1 \\ x+4y=19 \end{array}\right\}$$

PASO 1 Despejar **una** de las incógnitas **EN LAS DOS** ecuaciones

$$x=\frac{1+2y}{3} \qquad x=19-4y$$

PASO 2 **IGUALAR** los resultados obtenidos

$$\frac{1+2y}{3}=19-4y$$

PASO 3 Resolver la ecuación de primer grado obtenida

$$\frac{1+2y}{3}=\frac{57-12y}{3}$$
$$1+2y=57-12y$$
$$12y+2y=57-1$$
$$14y=56$$
$$y=\frac{56}{14}=4$$

Al final del paso 3 habremos encontrado la solución de una de las incógnitas
y = 4

PASO 4 Con la solución obtenida y una de las fórmulas del paso 1, se calcula la otra incógnita

$$x=19-4y \xrightarrow{y=4} x=19-4y=19-4*4=19-16=3$$

Hemos encontrado la solución de la otra incógnita x = 4

$\boxed{\textit{La solución del sistema es } x = 3 \quad y = 4}$

PASO 5 Comprobamos que la solución obtenida hace ciertas LAS DOS igualdades

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=1 \longrightarrow 3*3-2*4=1 \longrightarrow 9-8=1 \longrightarrow 1=1 \\ x+4y=19 \longrightarrow 3+4*4=19 \longrightarrow 3+16=19 \longrightarrow 19=19 \end{array}\right\} \text{OK}$$

C.- Método de Reducción

Multiplicar las ecuaciones por los números adecuados para que al sumarlas se vaya una incógnita

Consiste en intentar "eliminar" una de las incógnitas al sumar las dos ecuaciones.

PASO 1 Conseguir que el coeficiente de una de las incógnitas sea el mismo en las dos ecuaciones pero con signo contrario.

Para ello multiplicaremos **una, las dos o ninguna** ecuación según convenga.

IMPORTANTE!!!! Cuando multipliquemos la ecuación se multiplican TODOS los miembros.

EJEMPLO

$$\begin{array}{l} 3x-2y=1 \xrightarrow{*(-1)} -3x+2y=-1 \\ x+4y=19 \xrightarrow{*3} 3x+12y=57 \\ \hline \qquad\qquad 14y=56 \longrightarrow y=\frac{56}{14}=4 \end{array}$$

Para calcular la otra incógnita podemos volver a aplicar el método de reducción o sustituir en alguna de las ecuaciones la incógnita que ya conocemos y despejar la otra.

volver a REDUCIR

$$\begin{array}{l} 3x-2y=1 \xrightarrow{*2} 6x-4y=2 \\ x+4y=19 \xrightarrow{\text{nada}} x+4y=19 \\ \hline \qquad\qquad 7x=21 \longrightarrow x=\frac{21}{7}=3 \end{array}$$

PASO FINAL Comprobamos que la solución obtenida hace ciertas LAS DOS igualdades

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=1 \longrightarrow 3*3-2*4=1 \longrightarrow 9-8=1 \longrightarrow 1=1 \\ x+4y=19 \longrightarrow 3+4*4=19 \longrightarrow 3+16=19 \longrightarrow 19=19 \end{array}\right\} \text{OK}$$

SISTEMAS DE MÁS DE DOS ECUACIONES E INCÓGNITAS

En general el método más adecuado suele ser el de reducción, si bien, existen sistemas que por sus características particulares, requieren mejor la aplicación de otro método. Este método también es conocido como **método de GAUSS** y para resolverlo se sigue el esquema:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax+by+cz=d \\ b'y+c'z=d' \\ b''y+c''z=d'' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax+by+cz=d \\ b'y+c'z=d' \\ c''z=d'' \end{cases}$$

Ejemplo:

Resolver el sistema: $\begin{cases} -x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ x-y+z=7 \end{cases}$

Si sumamos la primera ecuación a la segunda y la tercera se obtiene el sistema

$\begin{cases} -x+y+z=3 \\ 2y \quad\quad =4 \\ 2z \quad\quad =10 \end{cases}$ y la solución entonces es: x = 4; y = 2; z = 5.

<u>INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA</u>

DEFINICIÓN DE INECUACIÓN

Una inecuación es una desigualdad (<, ≤, >, ≥) entre expresiones algebraicas.

<u>SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN</u>

Solución de una inecuación es un valor de x con el cual se cumple la desigualdad.

<u>RESOLVER UNA INECUACIÓN</u>

Resolver una inecuación consiste en encontrar todas sus soluciones.
Habitualmente tiene infinitas, que se agrupan en intervalos de R.

- **Inecuaciones lineales de primer grado**: (Se resuelven como una ecuación normal teniendo en cuenta que si se multiplica o divide por un número negativo la desigualdad cambia de signo)

ax + b > 0 → ax > - b: Si a > 0 x > - b/a → x ∈ (-b/a, + ∞)

Si a < 0 x < -b/a → x ∈ (- ∞, -b/a)

- **Inecuaciones lineales de grado mayor o igual que dos:**

Se igualan a cero y se resuelve la ecuación. Estas soluciones dividen la recta real en partes. Tomando un número en cada parte se comprueba si cumplen la inecuación o no. Si la cumple todo ese intervalo es solución. También habrá que comprobar los extremos de los intervalos.

$ax^2 + bx + c > 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$

$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$

Si la desigualdad contiene el igual los puntos se pintan y se cogen los extremos.

- **Inecuaciones con cocientes**

Se igualan a cero, por separado, numerador y denominador y se resuelve las ecuaciones.
- Los puntos del numerador se incluyen si en la desigualdad está el igual.
- Los puntos del denominador nunca se incluyen (no se puede dividir por cero.

Estas soluciones dividen la recta real en partes. Tomando un número en cada parte se comprueba si cumplen la inecuación o no. Si la cumplen todo ese intervalo es solución.

<u>SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE INECUACIONES</u>

Solución de un sistema de inecuaciones es una solución común a todas las inecuaciones que lo forman.

RESOLVER UN SISTEMA DE INECUACIONES

Resolver un sistema de inecuaciones consiste en encontrar todas sus soluciones.
Se resuelven por separado cada inecuación del sistema y luego se haya la intersección de las soluciones, es decir, las que cumplen todas las ecuaciones a la vez.

<u>INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS</u>

DEFINICIÓN

Una inecuación lineal con dos incógnitas adopta una de estas formas:

$$ax + by + c < 0 \text{ ó } ax + by + c > 0$$

En vez de los signos < o > pueden tener ≤ o ≥
En cada una de ellas, el conjunto de soluciones es el semiplano que está a uno de los lados de la recta $ax + by + c = 0$. Cuando en la desigualdad está incluido el "igual", los puntos de la recta también son soluciones.

RESOLUCIÓN GRÁFICA DE UNA INECUACIÓN

Para resolver gráficamente una inecuación con dos incógnitas $f(x,y) \leq g(x,y)$:

1. Se pasa todo a un miembro y se opera hasta obtener $f(x,y) \leq 0$
2. Se representa la recta $f(x,y) = 0$ (Continua si la desigualdad no se estricta y discontinua si es estricta)
3. Esta recta divide al plano en dos partes
4. Se toma un punto cualquiera del plano que no esté en la recta. Si ese punto cumple la desigualdad todo este semiplano será la solución de la inecuación, si no la cumple, la solución será el otro semiplano.

<u>SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS</u>

Varias inecuaciones forman un sistema cuando se buscan las soluciones comunes a todas ellas.
Como el conjunto de soluciones de una inecuación de primer grado con dos incógnitas es un semiplano, el conjunto de soluciones de un sistemas de inecuaciones de este tipo es la intersección de varios semiplano, es un recinto poligonal o bien un recinto abierto.

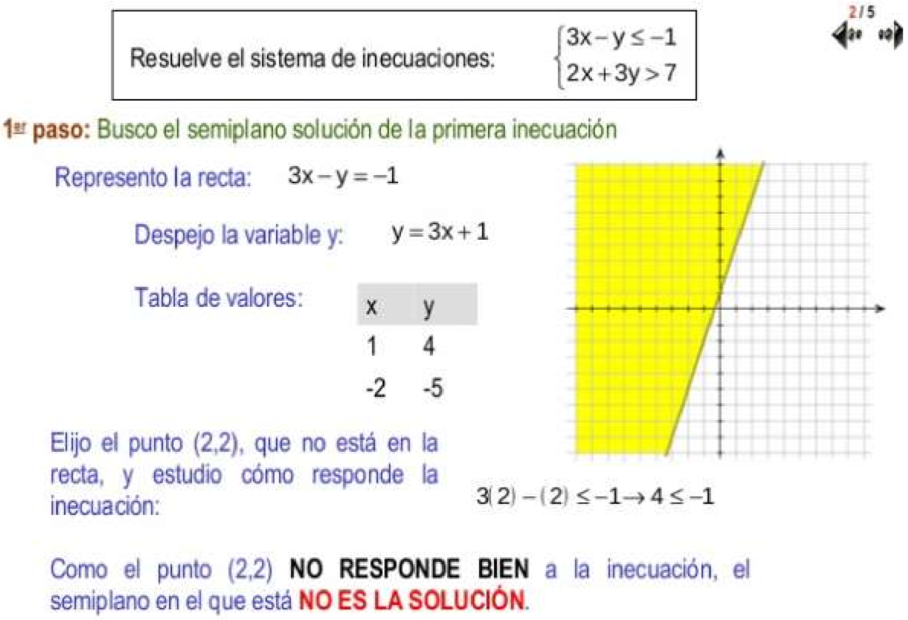
Es posible que los semiplanos no tengan ningún punto en común. En tal caso el sistema no tiene solución y se dice que es incompatible.

Las soluciones de un sistema de inecuaciones son las soluciones comunes a todas las inecuaciones que forman el sistema.
Pasos:

1er paso: representar la recta (cambiamos el símbolo por un igual)

2º paso: elegir un punto del plano (que no esté en la recta anterior) y estudiar cómo responder a la inecuación.

3[er] paso: colorear el semiplano solución.



PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

Para enfrentarse a los problemas que requieren plantear sistemas de ecuaciones conviene seguir las siguientes fases:

1.- Entender bien la situación que plantea el enunciado y las relaciones de las que habla.

2.- Identificar las cantidades desconocidas, asignando una letra diferente a cada una de ellas.

3.- Separar en el enunciado la parte en la que se establece cada una de las condiciones que deben cumplir las cantidades desconocidas (incógnitas)

4.- Transformar cada una de las ecuaciones del enunciado en una ecuación algebraica.

5.- Resolver el sistema de ecuaciones.

6.- Comprobar si el resultado tiene sentido

Ejemplo:

Un alumno tiene monedas en ambas manos. Si pasa 2 de la derecha a la izquierda, tendrá el mismo número de monedas en ambas manos, y si pasa 3 monedas de la izquierda a la derecha, tendrá en ésta, doble número de monedas que en la otra. ¿Cuántas monedas tiene en cada mano?
Hacemos un cuadro general con los datos que tenemos:

Monedas en las manos	**Derecha**	**Izquierda**
Monedas de partida	x	y
Pasa 2 de la mano derecha a la izquierda	x – 2	y + 2
Pasa 3 de la mano izquierda a la derecha	x + 3	y - 3

Planteamos las ecuaciones:

El número de monedas en ambas manos es el mismo: x – 2 = y + 2
El nº de monedas en la mano dcha es el doble que en la mano izda.: x + 3 = 2(y -3)

El sistema es:

$\begin{cases} x - 2 = y + 2 \\ x + 3 = 2(y - 3) \end{cases}$ Se resuelve y da: x = 17 e y = 13.