SOLUCIONES EXAMEN EvAU SEPTIEMBRE 2017

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima** 3 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & si\ x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$ $donde \ln significa\ logatitmo\ neperiano, se\ pide$:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x) en x=0

Continuidad en x=0

$\lim_{x\to 0^-} xe^{2x} = 0$ (a)

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = 0$ (b)

$f(0) = 0$ (c)

(a) = (b) = (c) = 0 Por tanto, la función es continua

Derivabilidad en x=0

$$f'(x) = \begin{cases} (1+2x)e^{2x} & x < 0 \\ \dfrac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2} & x > 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f'(0^-) = f'(0^+) = 1 \to La\ función\ es\ derivable}$$

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = \frac{\infty}{\infty} \to L'Hôpital = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x+1)}}{1} = \mathbf{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = \frac{-\infty}{\infty} \to L'Hôpital = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{2x}} = \frac{\infty}{-\infty} \to L'Hôpital = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-2e^{2x}} = \mathbf{0}$$

c) (1 punto) Calcular $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

u = x, du = dx

dv = e^{2x} dx; v = $\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int xe^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + C$$

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}dx = \boldsymbol{\frac{3-e^2}{4e^2}}$$

Ejercicio 2. **Calificación máxima** 3 puntos.

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$ $se\ pide$:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2

$$\vec{u}_{r1} = (1,4,2),\ P_{r1} = (0,-1,0);\ \vec{u}_{r2} = (-1,-1,1),\ P_{r2} = (1,0,0),\ \overrightarrow{P_{r1}P_{r2}} = (1,1,0)$$

Se calcula el rango de la matriz formada por los tres vectores

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to Rango\ (A) = 3 \to \boldsymbol{r\ y\ s\ se\ cruzan}$$

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas

$$|\vec{u}_{r1}\ x\ \vec{u}_{r2}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = |(6,-3,3)| = 3\sqrt{6}$$

$$d_{(r_1,r_2)} = \frac{|\overrightarrow{P_{r1}P_{r2}}; \vec{u}_{r1}; \vec{u}_{r2}|}{|\vec{u}_{r1}\ x\ \vec{u}_{r2}|} = \frac{|3|}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{6}}\ \mathbf{u}$$

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto P (1, 2, 3)

$$\overrightarrow{P_{r1}P} = (1,3,3);\ \overrightarrow{u_{r1}} = (1,4,2), P_{r1} = (0,-1,0)$$

$$\pi = \begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to \boldsymbol{\pi = 6x - y - z - 1 = 0}$$

Ejercicio 3, **Calificación máxima** 2 puntos.

Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Planteamos las ecuaciones que van a dar el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ \frac{100}{100}x + \frac{75}{100}y + \frac{60}{100}z = \frac{72}{100} \cdot 25 \\ \frac{15}{100}y + \frac{22}{100}z = \frac{16}{100} \cdot 25 \end{cases} \to\to \begin{cases} x + y + z = 25 \\ 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \end{cases}$$

Podemos resolverlo por Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 20 & 15 & 12 \\ 0 & 15 & 22 \end{vmatrix} = 10$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 1 & 1 \\ 360 & 15 & 12 \\ 400 & 15 & 22 \end{vmatrix}}{10} = \frac{30}{10} = \mathbf{3};\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 25 & 1 \\ 20 & 360 & 12 \\ 0 & 400 & 22 \end{vmatrix}}{10} = \frac{120}{10} = \mathbf{12};\ x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 25 \\ 20 & 15 & 360 \\ 0 & 15 & 400 \end{vmatrix}}{10} = \frac{100}{10} = \mathbf{10}$$

Ejercicio 4. **Calificación máxima** 2 puntos

Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio con probabilidades de $P(A) = \frac{4}{9}, P(B) = \frac{1}{2}\ y\ P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

$$p(A) = \frac{4}{9}, p(B) = \frac{1}{2}\ y\ p(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

Serán independientes si:

$$p(A)xp(B) = p(A \cap B) = \frac{4}{9}x\frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

Por otro lado vemos que:

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$$

Dado que $\frac{2}{9} \neq \frac{5}{18}$ vemos que **los sucesos no son independientes**

b) (1 punto) Calcular $p(\bar{A}/B)$ donde C denota el suceso complementario de A.

$$p(\bar{A}\ /\ B) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Puntuación máxima** 3 puntos

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (0'5 puntos) Calcular la matriz B = (A – I) (2I + 2A)

$B = (A - I)(2I + 2A) = (A - I)\cdot 2(I + A) = 2\cdot(A - I)(I + A) = 2(A - I)\cdot(A + I) = 2(A^2 - I^2) = 2(A^2 - I)$

$$2(A^2 - I) = 2\left[\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

b) (1'5 puntos) Determinar el rango de las matrices A – I; $A^2 - I$ y $A^3 - I$.

$$A-I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow |A-I|=0\rightarrow\rightarrow\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0\ \boldsymbol{luego\ el\ rg\ (A-I)=\ 2}$$

$$(A^2-I)=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0\rightarrow\begin{vmatrix}3&0\\0&0\end{vmatrix}=0\rightarrow\rightarrow \boldsymbol{rango(A^2-I)=\ 1}$$

$$(A^3)=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$(A^3-I)=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=0\rightarrow\begin{vmatrix}7&0\\0&-1\end{vmatrix}=-7\neq 0\rightarrow \boldsymbol{rango\ (A^3-I)=\ 2}$$

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.
Si vemos los resultados de A^2 y A^3 de los apartados anteriores, nos damos cuenta de que:

$A^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ si n es par; $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ si n es impar

$A^6=\begin{pmatrix}2^6&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Calculamos la inversa por cualquiera de los métodos que conocemos aunque dada la particularidad de la matriz, en este caso, el método más fácil es mediante Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}64&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\ Dividimos\ F1\ entre\ 64\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/64&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$(A^6)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{64} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. **Puntuación máxima** 3 puntos

Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva y=f(x) en el punto de abscisa x=0.

Tenemos que calcular la ecuación de la recta y – f(0) = f' (0) (x-0)

$$f(0) = \frac{e^{-0}}{0^2+1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-1)(x^2+1) - e^{-x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-e^{-0}(0+2\cdot 0+1)}{(0^2+1)^2} = -1$$

Sustituimos en la ecuación primera y nos da: y – 1 = -1 (x – 0) → **y = -x + 1**

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

Asíntotas verticales: **No tiene** porque el denominador no se anula nunca: $x^2 + 1 = 0$ no da ningún número real.

Asíntotas horizontales: Se tiene que cumplir que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \to L'Hopital \to \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2x} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \frac{e^{-x}}{\infty} = 0$$

Horizontales **cuando x tiende a - ∞ no hay asíntota, pero sí cuando tiende a + ∞ ya que f(x) = 0**

c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en caso de que existan.

Se calcula la primera derivada y se iguala ésta a cero, así calculamos los puntos en donde la función puede cambiar de creciente a decreciente o al revés:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \to\to -e^{-x}(x+1)^2 = 0 \dashrightarrow x = -1$$

Se establecen dos intervalos y se mira cual es el valor en ellos:

- Si x ∈ (- ∞; -1) → f'(x) < 0 luego la función decrece en este intervalo.
- Si x ∈ (-1; ∞) → f'(x) < 0, por tanto la función también decrece

Por tanto, la función es decreciente en todo el intervalo No tiene ni máximos ni mínimos.

Ejercicio 3. **Puntuación máxima** 2 puntos

Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto Q(3, 5, -3) a la recta r.

Se saca el vector director de la recta y con el punto ponemos la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$\overrightarrow{u_r} = P_2 - P_1 = (7, 0, 2) - (3, 2, 0) = (4, -2, 2) = 2\,(2, -1, 1)$

$$\overrightarrow{u_r} = (2, -1, 1) \; y \; P_1 = (3,2,0) \longrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora calculamos la distancia del punto a la recta:

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ} \; x \; \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$$

Siendo: $\overrightarrow{P_rQ} = (3, 5, -3) - (3, 2, 0) = (0, 3, -3)$

$$|\overrightarrow{P_rQ} \; x \; \overrightarrow{u_r}| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix} \right\| = |(0, -6, -6)| = 6\sqrt{2}$$

$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ} \; x \; \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \mathbf{2\sqrt{3}\ u}$

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

Calculamos $\pi \perp r \rightarrow \pi: 2x - y + z + D = 0$

Imponemos que $Q \in r \rightarrow 6 - 5 - 3 + D = 0 \rightarrow D = 2 \rightarrow \pi: 2x - y + z + 2 = 0$

Calculamos el punto de corte entre r y π

$2(3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \rightarrow$ el punto de corte será Q´(1,3,−1)

Ejercicio 4. **Puntuación máxima** 2 puntos

Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 3, -1), B(3, 1, 0) y C(2, 5, 1) y se pide:

a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

Sacamos los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \; y \; \overrightarrow{BC}$ y calculamos sus módulos, de modo que si tienen 3 lados iguales será equilátero, si tiene 2 isósceles y si no tiene ninguno será escaleno.

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1) \longrightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9} = 3$$
$$\overrightarrow{AC} = (1, 2, 2) \longrightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9} = 3$$
$$\overrightarrow{BC} = (-1, 4, 1) \longrightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$$

Se trata de un **triángulo isósceles**

b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos

Calculamos uno de los ángulos:

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2-4+2}{9} = 0 \rightarrow \alpha = 90º$

Al ser un triángulo recto isósceles, los otros dos ángulos son iguales y medirán 45º cada uno.