LOS NÚMEROS REALES

LOS NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

INTRODUCCIÓN:

Los números racionales:

- Se caracterizan porque pueden expresarse:

- En forma de **fracción**, es decir, como cociente de dos números enteros tales que x = $\frac{a}{b}$ siendo b ≠ 0
- En forma **decimal**: O bien son enteros o bien tienen expresión decimal finita o periódica.

- El conjunto de todos los números racionales se designa por Q.

Los números irracionales:

- Se caracterizan porque:

- No pueden expresarse en forma de fracción.
- Su expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas.

- El conjunto de todos los números irracionales se designa por **I**.

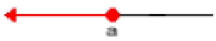
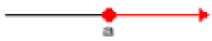
Tanto los números racionales como los irracionales se llaman **números reales**. El conjunto de los números reales se designa por **R**.

ESQUEMA DE CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES

- REALES (R)
  - RACIONALES (Q)
    - ENTEROS (Z)
      - NATURALES (N) $\Rightarrow 0 ; 4 ; \frac{24}{6} ; \sqrt{81}$......
      - ENTEROS NO NATURALES (Enteros negativos) $\Rightarrow -11 ; \frac{-24}{4} ; \sqrt[3]{-8}$....
    - FRACCIONARIOS (Racionales no enteros)
      - Fracciones: $\frac{3}{4}, \frac{-5}{8}$...
      - Números decimales
        - Exactos: 0,31;...
        - Periódicos
          - Puros: $7,\hat{1}$;...
          - Mixtos: $7,3\hat{1}$,...
  - IRRACIONALES (I) $\Rightarrow \sqrt{2} ; -\sqrt{3} ; \sqrt[3]{5} ; \pi$, decimales no periódicos.....

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

Sirven para expresar tramos de la recta real

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	(a,b)	$\{ x / a < x < b \}$ Nº comprendidos entre a y b	
Intervalo cerrado	[a,b]	$\{ x / a \leq x \leq b \}$ Nº comprendidos entre a y b, éstos incluidos.	
Intervalo semiabierto	(a,b]	$\{ x / a < x \leq b \}$ Nº comprendidos entre a y b, incluido b	
	[a,b)	$\{ x / a \leq x < b \}$ Nº comprendidos entre a y b, incluido a	
Semirrecta	(-∞,a)	$\{ x / x < a \}$ Números menores que a	
	(-∞,a]	$\{ x / x \leq a \}$ Nº menores o iguales que a	
	(a,∞)	$\{ x / a < x \}$ Números mayores que a	
	[a,∞)	$\{ x / a \leq x \}$ Nº mayores o iguales que a	

Nota: Si queremos nombrar un conjunto de puntos formados por dos o más de estos intervalos, se utiliza el signo È (unión) entre ellos.

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

DEFINICIÓN

El **valor absoluto de un número real**, a, es el propio número a, si es positivo, o su opuesto, -a, si es negativo: | a | = $\begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$
(Es decir, consiste en convertirlo en positivo)

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

- $|x - a| = b \Rightarrow \begin{cases} x - a = b \Rightarrow x = a + b \\ x - a = -b \Rightarrow x = a - b \end{cases}$ → {a- b, a+b} (Dos puntos concretos)
- $|x - a| < b \Rightarrow \begin{cases} x - a = b \Rightarrow x = a + b \\ x - a = -b \Rightarrow x = a - b \end{cases}$ → (a-b, a+b) (El interior)
- $|x - a| \geq b \Rightarrow \begin{cases} x - a = b \Rightarrow x = a + b \\ x - a = -b \Rightarrow x = a - b \end{cases}$ → (- ∞, a-b] U [a+b, +∞) (El exterior)

POTENCIAS DE NÚMEROS REALES

Cuando un mismo número lo queremos multiplicar por sí mismo, una cierta cantidad de veces, la operación se puede reducir o condensar a una expresión que da origen al concepto de potencia.
Su representación general es como sigue:
$\mathbf{a}^b$ donde a es la base y b es el exponente y se lee: "a elevado a b"

Ej.: Imaginemos que queremos multiplica el número 2 cinco veces por sí mismo
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$

La potencia de exponente la unidad fraccionaria se define como: $\boldsymbol{x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$

Y la potencia de exponente un número fraccionario se define así:
$\boldsymbol{x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{x^m}}$

Particularidades en la potenciación.

a) Cualquier número negativo elevado a exponente par, siempre da como resultado un número positivo.

$(-a)^{\text{nº par}} = a^{\text{nº par}}$ Ej.: $(-2)^4 = 2^4 = 16$

b) Cualquier número negativo elevado a exponente impar siempre da como resultado un número negativo

$(-a)^{\text{nº impar}} = -a^{\text{nº impar}}$ Ej.: $(-2)^3 = -2^3 = -8$

c) Es obvio que cualquier número positivo elevado a exponente par o impar siempre da como resultado un número positivo.

d) Cualquier potencia de la unidad siempre es la unidad (excepto cuando el exponente sea ∞)

$1^m = 1$ Ej.: $1^3 = 1$

e) Cualquier número elevado a cero siempre es igual a la unidad.

$m^0 = 1$ Ej.: $3^0 = 1$

Operaciones con potencias

Producto del potencias de la misma base $\boxed{\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}}$

Ejemplo:
$3^5 \cdot 3^2 = 3^7$
$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{9}{10}}$
$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 5^{\frac{8}{15}}$

Cociente de potencias de la misma base $\boxed{\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}}$

Ejemplo:
$5^2 : 5^6 = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$

Potencia de una potencia $\boxed{(a^m)^n = a^{m\cdot n}}$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{8^2}} = \left(8^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{2\cdot 1}{5\cdot 3}} = 8^{\frac{2}{15}}$$

Producto de potencias del mismo exponente $\boxed{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$

Ejemplo:

$$3^{\frac{5}{7}}\, 6^{\frac{5}{7}} = 18^{\frac{5}{7}}$$

Cociente de potencias del mismo exponente $\boxed{a^m : b^m = (a : b)^m}$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{25} : \sqrt[3]{4} = (5^2)^{\frac{1}{3}} : (2^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

<u>RADICALES</u>

$\sqrt[n]{a}$ donde $\begin{cases} n = \text{índice} \\ \sqrt{} = \text{radical} \\ a = \text{radicando} \end{cases}$

<u>Operaciones con números radicales</u>

Producto de radicales del mismo índice $\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$

Ejemplo:

$\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$

Cociente de radicales del mismo índice $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{10}{2}} = \sqrt[4]{5}$$

Potencia de un radical

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{(a^m)^p} = \sqrt[n]{a^{mp}}}$$

Ejemplo:

$\left(\sqrt[5]{2}\right)^4 = \sqrt[5]{2^4}$

Raíz de un radical $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}}$ $\boxed{\sqrt[m]{a\sqrt[n]{b}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n \cdot b}} = \sqrt[m\cdot n]{a^n \cdot b}}$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$$

$$\sqrt[3]{2^4\sqrt{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3}} = \sqrt[12]{3 \cdot 2^4}$$

Reducción de radicales a índice común.

- Primero hallaremos el m.c.m. de todos los índices. Este m.c.m. es el nuevo índice común a todos los radicales de la operación.

- A continuación, con objeto de no alterar los valores iniciales de las raíces, dividiremos el m.c.m entre cada índice antiguo, y el resultado de la división es a lo que hay que elevar el respectivo radicando.

- Una vez reducidos a índice común todos los radicales, ya tendremos preparada la expresión para operarla con las reglas de cálculo del producto y cociente.

Ejemplo: Operar la siguiente expresión $\dfrac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{9}}$

Vemos que como los radicales no tienen el mismo índice, habrá que reducirlos a índice común:
m.c.m. (2,3,5) = 30

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{9}} = \frac{\sqrt[30]{3^{15}}\cdot\sqrt[30]{3^{10}}}{\sqrt[30]{9^6}} = \frac{\sqrt[30]{3^{15}\cdot 3^{10}}}{\sqrt[30]{(3^2)^6}} = \sqrt[30]{\frac{3^{15}\cdot 3^{10}}{3^{12}}} = \sqrt[30]{3^{15}\cdot 3^{10}\cdot 3^{-12}} = \sqrt[30]{3^{13}}$$

Simplificación del índice y del exponente del radicando.

Se divide el índice y el exponente del radicando por un divisor común a ambos o por su m.c.d. con lo que resultarán totalmente simplificados.

Ejemplo:

$$\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}$$

Extracción de factores de un radical.

Esta operación únicamente se puede realizar cuando el exponente del radicando es mayor o igual que el índice de la raíz, y consiste en extraer todas las bases posibles del radicando, fuera de la raíz.
Para ello, se divide el exponente del radicando, entre el índice de la raíz. Sale fuera de la raíz la base elevada al cociente de la división y queda dentro de la raíz la base elevada al resto de la división.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} \text{ con } m \geq n \;\rightarrow\; n\,\sqrt[n]{a^m} = a^c\,\sqrt[n]{a^r}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{3^{14}} = \sqrt[5]{3^5\cdot 3^5\cdot 3^4} = 3^2\sqrt[5]{3^4}$$

<u>**Racionalización**</u>

Se entiende por racionalización a aquellos procesos que permiten eliminar los radicales del denominador de una fracción.

a) Cuando el radical se encuentra en forma de producto en el denominador

$$\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{m}]{\mathbf{a^n}}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[\mathbf{m}]{\mathbf{a^n}}} \cdot \frac{\sqrt[\mathbf{m}]{\mathbf{a^{m-a}}}}{\sqrt[\mathbf{m}]{\mathbf{a^{m-n}}}} = \frac{\sqrt[\mathbf{m}]{\mathbf{a^{m-n}}}}{\mathbf{a}}}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{2^{7-3}}}{\sqrt[7]{2^{7-3}}} = \frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3} \cdot \sqrt[7]{2^4}} = \frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^3 \cdot 2^4}} = \frac{\sqrt[7]{2^4}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{\sqrt[7]{2^4}}{2}$$

b) Cuando el radical se encuentra en forma de suma o diferencia en el denominador.

En este caso, multiplicamos numerador y denominador de la expresión dada por la expresión conjugada del denominador, sabiendo que la expresión conjugada es la misma, sólo que con el signo que une los radicales cambiado.

Ejemplo: Racionalizar $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$$

EJERCICIOS

1.- Escribe en todas las formas posibles los siguientes intervalos y semirrectas:

a) $\{x \,/\, -2 \leq x < 3\}$ b) $(-\infty, -2]$ c) Números mayores que -1

2.- Escribe en forma de intervalos los valores de x que cumplen:

a) $|x+2| \geq 3$ b) $|x-4| < 2$

3.- a) Opera y simplifica el resultado: $-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}+1'1\hat{6}-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{3}{4}\right]$

b) Simplifica: $\frac{2^{-5}\cdot 4^{2}}{2^{-1}}$

c) Calcula y simplifica: $\frac{-2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}+0'8\hat{3}-\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right]$

d) Simplifica: $3^{6}\cdot 3^{-5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

e) Reduce a una sola potencia: $\frac{3^{-5}\cdot 9^{4}}{3^{-6}\cdot 3^{0}}$

f) Reduce a una sola potencia y calcula: $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{3} : \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}$

4.- Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^{7}}$ b) $\sqrt[5]{2^{3}} : \sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3^{4}}$ d) $\frac{\sqrt{a^{3}}}{\sqrt[3]{a^{2}}}$

5.- Efectúa y simplifica:

a) $\sqrt{\frac{2}{27}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $\sqrt{48}-2\sqrt{12}$ c) $\frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}$

6.- Una vacuna tiene 100 000 000 bacterias por centímetro cúbico. ¿Cuántas bacterias habrá en una caja de 120 ampollas de 80 milímetros cúbicos cada una?

7.- **a)** Calcula el número aproximado de glóbulos rojos que tiene una persona, sabiendo que tiene unos
4 500 000 por milímetro cúbico y que su cantidad de sangre es de 5 litros.
b) ¿Qué longitud ocuparían esos glóbulos rojos puestos en fila si su diámetro es de 0,008 milímetros por término medio?
Exprésalo en kilómetros.