A1.- Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

La matriz de coeficientes A y la matriz ampliada A* vienen dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$|A|=a^2+a=0$ → a=0 y a=-1.

$$\begin{cases} si\ a \neq 0 \neq -1, rg(A) = 3 = rg(A^*)\ \rightarrow Sistema\ compatible\ determinado \\ si\ a = 0\ , rg(A) = 2 = rg(A^*) \rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado \\ si\ a = -1, rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3 \rightarrow sistema\ incompatible \end{cases}$$

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para a = 0.

Si a=0, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

A2.- Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Justificar, utilizando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo [1,10] en el que ambas funciones toman el mismo valor.

Se define la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$.

Al ser una función polinómica, se trata de una función continua.

h(1)<0 y h(10)>0, por lo que se cumple el teorema de Bolzano, es decir, existe al menos un punto $c \in (1,10)$ tal que h(c)=0. Como h(x)=f(x) – g(x), si h(x)=0, f(x)=g(x).

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva y = f(x) con pendiente mínima.

La pendiente de la recta tangente a y=f(x) en un punto x=c viene dada por la derivada de la función en ese punto, es decir, $m = 3c^2 + 6c$, que tomará un valor extremo (máximo o mínimo) cuando su derivada sea 0, es decir, en m'(c)=6c+6=0. En c= -1 hay un mínimo, y la pendiente viene dada por m=-3. Por lo tanto, la recta tangente a la curva en c=-1 viene dada por $y = -3(x + 1) + 1$.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - lnx\right]_1^2 \approx 1{,}02336.$$

A3.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$,

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

Obtenemos el vector director y un punto de las dos rectas:

$recta\ r \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1,1,3) \\ P_r(0,-2,1) \end{cases}$; $recta\ s \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_s = (2,-1,1) \\ P_s(-1,-4,0) \end{cases}$. Calculamos $\overline{P_r P_s} = (-1,-2,-1)$.

Obtenemos el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$. Las rectas se cruzan.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a *r* y que pasa por el punto P(2,-1,5).

$\vec{n} = (1,1,3) \rightarrow x + y + 3z + D = 0$. Sustituyendo el valor de P se obtiene 2 – 1 +15+D=0, de donde se obtiene D=-16.

Por lo tanto, π: $x + y + 3z = 16$.

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta *r* que contiene a la recta *s*.

El vector normal al plano viene dado por $\vec{n} = \overrightarrow{v_r} x \overrightarrow{v_s} = (4,5,-3)$. Un punto de la recta s es $P_s(-1,-4,0)$. El plano pedido será π: $4x + 5y - 3z + 24 = 0$.

A4.- Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de la diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es de 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

La probabilidad de acertar el lanzamiento número j vendrá dada por el A_j. La de fallar será F_j. La probabilidad de que el globo explote antes del cuarto disparo será:

P(A_1)+P($F_1 \cap A_2$)+P($F_1 \cap F_2 \cap A_3$) $= 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.79$.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

La probabilidad de que el globo siga intacto será la intersección de las probabilidades de que fallen los cuatro lanzamientos: $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_3) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.084$.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

En este caso se tiene una distribución binomial con n=10 y p=0.85. La probabilidad de que se hayan explotado exactamente 6 globos será: $P(6\text{ aciertos}) = \binom{10}{6} 0.85^6 \cdot 0.15^4 \approx 0.0400957.$

B1.- Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Los precios del kilo de cada pescado serán las incógnitas x, y, z. Se plantea un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 7400000z & = 275800000 \\ x & = y + 0.11 \\ 7400000z & = 63600000 \end{cases}$$

Despejando las incógnitas se obtiene x=5,78 euros/kg (dorada), y=5,67 euros/kg (lubina) y z=8,59 euros/kg (rodaballo).

B2.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ x \leq 1 \\ (x-1)^3 & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en [−4,4].

Para que una función sea continua en un punto x = a, se debe cumplir:

- $\exists\ f(a)$
- $\exists\ \lim_{x\to a} f(x) = L$ (con L finito)
- $f(a) = L$

La función es continua por ser polinómica, exceptuando el punto x=1, que es el que hay que evaluar.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 = f(0)$. Por lo tanto, f(x) es continua en el intervalo [-4,4].

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en [−4,4].

$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ x < 1 \\ 3(x-1)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$. Haciendo los límites laterales de la derivada en el punto x=2 se obtiene $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2(x-1) = 0$ y $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 3(x-1)^2 = 0$. Por lo tanto, la función es derivable en [-4,4].

El punto x=1 es un extremo relativo ($f'^{(x)} = 0$). El límite por la izquierda es negativo y por la derecha, positivo, por lo que la función es creciente para valores menores que x=1 y decreciente para valores de x mayores que x=1. Es decir, f(x) es creciente en el intervalo [-4,0) y decreciente en (0,4].

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y derivable en x = 1.

Viendo el resultado del apartado anterior podemos determinar que g(x) es una función continua en el intervalo [-4,4].

$g'(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < 1 \\ 6(x-1) & si\ x > 1 \end{cases}$. En x=1 los límites laterales no coinciden, por lo que la función g(x) no es derivable en x=1.

B3.- Dados los puntos P(-3,1,2) y Q(-1,0,1) y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

El vector normal al plano π es $\vec{n} = (1,2,-3)$. La proyección de Q sobre π vendrá dada por $\{Q + \alpha\vec{n} \cap \pi$, de modo que α se obtiene como solución de (α-1)+2(2 α)-3(1-3 α)=4, es decir, α=4/7 y la proyección del punto es $\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$.

b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

El plano buscado tiene el mismo vector normal que π, por lo que tiene la forma $x + 2y - 3z + D = 0$. Como contiene al punto P, sustituyendo se obtiene $-3 + 2 - 6 + D = 0$, obteniendo D=7. El plano, por tanto, será forma $x + 2y - 3z - 7 = 0$.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene los puntos P y Q.

Los vectores directores del plano perpendicular serán $\vec{n} = (1,2,-3)$ y $\overrightarrow{PQ} = (2,-1,-1)$. El vector normal del plano vendrá dado por el producto vectorial, $\vec{n}x\overrightarrow{PQ} = (-5,-5,-5)$. El plano será por tanto x+y+z=0.

B4.- Se consideran dos sucesos A y B tales que P(A) = 0.5, P(B) = 0.25 y P(A∩B) = 0.125. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y AUB?

Si los sucesos A y B son incompatibles, la intersección con otro suceso incompatible también será incompatible, es decir, $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

Son sucesos independientes porque se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}125$.

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario del suceso A).

Aplicando la ley de Morgan, se obtiene $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) = 0{,}375$.

d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}/A)$.

$P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}75.$