SOLUCIONES EXAMEN EvAU SEPTIEMBRE 2017

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos).
Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -2x - az = 2 \\ y + az = -2 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.
b) Resuélvase para a = 4.

a) Para discutir el sistema es necesario estudiar los rangos de las matrices A y A*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \; y \; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Como $A \subset A^* \rightarrow RgA^* \geq Rg\,A$

Estudiamos el rango de la matriz A en función del valor del parámetro a:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - 3a$$

$$|A| = 0 \rightarrow 2 - 3a = 0 \rightarrow a = \frac{2}{3} \begin{cases} \forall a \neq \frac{2}{3} \rightarrow |A|_3 \neq 0 \rightarrow RgA = 3 \\ \forall a = \frac{2}{3} \rightarrow |A|_3 = 0 \; y \; |A|_2 \neq 0 \rightarrow RgA = 2 \end{cases}$$

Estudiamos el rango de la matriz A* en función del valor del parámetro a:

$$\begin{cases} \forall a \neq \frac{2}{3} \rightarrow |A|_3 \neq 0 \rightarrow RgA^* = 3 \\ \forall a = \frac{2}{3} \rightarrow |A|_3 = 0 \; pero \; |A^*|_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow RgA^* = 3 \end{cases}$$

Discusión:

- $\forall \boldsymbol{a} \neq \frac{2}{3} \rightarrow \boldsymbol{RgA = RgA^* = n^{\underline{o}}\, ecs. = 3 \rightarrow S.C.D}$ ($\boldsymbol{1\ solución\ por\ incógnita}$)
- $\forall \boldsymbol{a} = \frac{2}{3} \rightarrow \boldsymbol{RgA \neq RgA^* \rightarrow S.I}$ ($\boldsymbol{no\ hay\ solución}$)

b) Resolvemos el sistema para a = 4. Para este valor del parámetro el sistema es compatible determinado (S.C.D.) por lo que existirá una solución para cada incógnita.

Podemos resolver usando diferentes métodos. En este caso vamos a resolver usando la Regla de Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -10 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & -2 & -1 \\ \mathbf{2} & 0 & -4 \\ \mathbf{-2} & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-10} = 1 \\ y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{-2} & -1 \\ -2 & \mathbf{2} & -4 \\ 0 & \mathbf{-2} & 4 \end{vmatrix}}{-10} = 2 \\ z = \dfrac{|A_z|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & \mathbf{-2} \\ -2 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & \mathbf{-2} \end{vmatrix}}{-10} = -1 \end{cases}$$

Solución: x = 1; y = 2; z = -1.

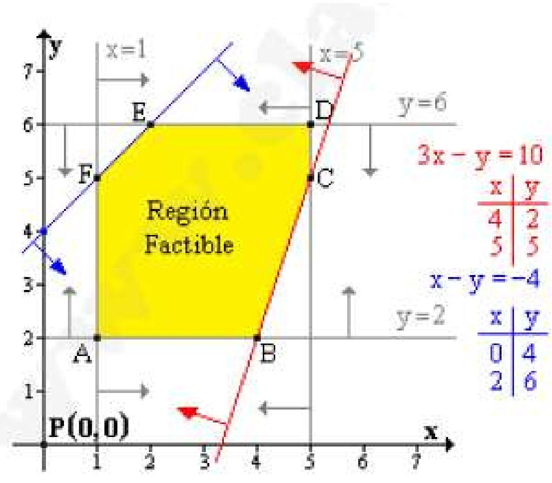
Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la región del plano S definida por:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 6 \\ x - y \geq -4 \\ 3x - y \leq 10 \end{cases}$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función f(x, y) = -200x + 600y en la región S y obténgase los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.

a) La región S es la región limitada por las rectas obtenidas de las inecuaciones dadas. Para representar cada recta damos valores a x e y.

Posteriormente concretamos la región que hace referencia a la inecuación asociada a cada una de las rectas (en el dibujo viene representada mediante una flecha), para ello elegimos un punto situado a uno de los lados de la recta y lo sustituimos en la inecuación comprobando si se cumple.



Vértice A: $A(1, 2)$

Vértice B: $\begin{cases} y = 2 \\ 3x - y = 10 \end{cases} B(4, 2)$

Vértice C: $\begin{cases} x = 5 \\ 3x - y = 10 \end{cases} C(5, 5)$

Vértice D: $D(5, 6)$

Vértice E: $\begin{cases} y = 6 \\ x - y = -4 \end{cases} E(2, 6)$

Vértice F: $\begin{cases} x = 1 \\ x - y = -4 \end{cases} F(1, 5)$

b) Para calcular los valores máximo y mínimo de la función f(x, y) = -200x + 600y en la región S sustituimos los valores de los vértices en la misma.

$$z = f(x,y) = -200x + 600y \begin{cases} A = (1,2) \to z\,(1,2) = -200 \cdot 1 + 600 \cdot 2 = 1.000 \\ \boldsymbol{B = (4,2) \to z\,(4,2) = -200 \cdot 4 + 600 \cdot 2 = 400} \\ C = (5,5) \to z\,(5,5) = -200 \cdot 5 + 600 \cdot 5 = 2.000 \\ D = (5,6) \to z\,(5,6) = -200 \cdot 5 + 600 \cdot 6 = 2.600 \\ \boldsymbol{E = (2,6) \to z\,(2,6) = -200 \cdot 2 + 600 \cdot 6 = 3.200} \\ F = (1,5) \to z\,(1,5) = -200 \cdot 1 + 600 \cdot 5 = 2.800 \end{cases}$$

Solución: El valor máximo que alcanza la función es 3.200 unidades y lo hace en el vértice E. El valor mínimo que alcanza la función es 400 unidades y lo hace en el vértice B.

Ejercicio 3. (Calificación máxima 2 puntos)
Se considera la función de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & si\ x < -1 \\ x^2 + x - 2 & si\ x \geq -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función sea continua en todo su dominio.
b) Para a = 2, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) Para confirmar que la función es continua en todo su dominio hay que estudiar la continuidad de la misma en el punto x = -1.

- $x = -1 \to f(-1) = (-1)^2 + (-1) - 2 = \mathbf{-2}$
- $\lim_{x\to -1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to -1^+} x^2 + x - 2 = (-1)^2 + (-1) - 2 = -2 \\ \lim_{x\to -1^-} ax + 1 = a \cdot (-1) + 1 = -a + 1 \end{cases}$
- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \to -2 = -a + 1 \to \boldsymbol{a = 3}$

Solución: Cuando a = 3 la función es continua en todo su domino.

Los puntos de corte con la gráfica son:

- Eje x: $y = 0 \begin{cases} (-\infty,-1) \to 0 = 2x + 1 \to x = -1/2 \ \notin (-\infty,-1) \\ (-1,+\infty) \to 0 = x^2 + x - 2 \to \begin{cases} x = -2 \notin (-1,+\infty) \\ x = 1 \in (-1,+\infty) \end{cases} \end{cases}$
- Eje y: $x = 0 \to y = 0^2 + 0 - 2 = -2$

Solución: Los puntos de corte son A = (1, 0) y B = (0, -2).

Estudiamos la monotonía de la función. Para ello nos fijamos en el dominio y en los valores de x que anulan la primera derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & si\ x < -1 \\ 2x + 1 & si\ x > -1 \end{cases} \to \begin{cases} (-\infty,-1) \to f'(x) = 0 \to 3 \neq 0 \to No\ hay\ ningún\ valor \\ (-1,+\infty) \to f'(x) = 0 \to 2x + 1 = 0 \to x = -1/2 \end{cases}$$

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:

$$\boldsymbol{Solución} \begin{cases} (-\infty, \mathbf{-1}) \to \boldsymbol{f'(x)} > 0 \to Crece \\ (\mathbf{-1, -1/2}) \to \boldsymbol{f'(x)} < 0 \to \boldsymbol{Decrece} \\ (\mathbf{-1/2}, +\infty) \to \boldsymbol{f'(x)} > 0 \to \boldsymbol{Crece} \end{cases}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0,02; mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0,06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

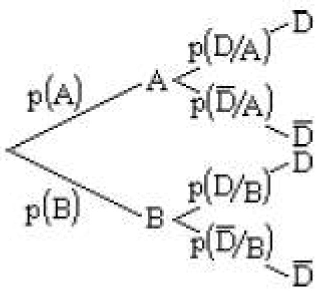
a) No salga defectuoso.
b) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

a y b) Inicialmente describimos los sucesos:

$$A = Ordenador\ fabricado\ modelo\ A$$
$$\bar{A} = Ordenador\ fabricado\ modelo\ B$$
$$D = Ordenador\ defectuoso$$
$$\bar{D} = Ordenador\ no\ defectuoso$$

Seguidamente ordenamos la información dada en el enunciado. Podemos gestionarla mediante un diagrama en árbol o usando una tabla.

	Modelo A (A)	**Modelo B ($\bar{A}$)**
Defectuosos (D)	0,02	0,06
No defectuosos ($\bar{D}$)	0,98	0,94



Sabemos que:

$$\begin{cases} P(A) = 2 \cdot P(\bar{A}) \\ P(A) + P(\bar{A}) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(A) = 2/3 \\ P(\bar{A}) = 1/3 \end{cases}$$

Ahora ya podemos calcular las probabilidades de los sucesos que nos piden:

- **Probabilidad de que el ordenador no salga defectuoso:**

$$\boldsymbol{P(\bar{D}) = P(A) \cdot P(\bar{D}/A) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{D}/\bar{A}) = \frac{29}{30} \approx 96,7\%}$$

- **Probabilidad de que, siendo un ordenador modelo A, haya salido defectuoso (Teorema de Bayes):**

$$\boldsymbol{P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{2}{5} = 40\%}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos).
El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 24 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo X, supere las 48 horas, si μ = 36 horas.
b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo (24,24; 47,76) para μ.

a) Inicialmente definimos la variable aleatoria continua. Esta variable sigue una distribución normal N (μ, σ) = N (36, 24).

$$x = Tiempo\ que\ tarda\ la\ compañía\ en\ hacer\ la\ portabilidad\ de\ un\ número\ (horas)$$

La media de la muestra también sigue una distribución normal: N (μ, σ/$\sqrt{n}$) = N (36, 24/$\sqrt{16}$).

$$\bar{x} = Media\ del\ tiempo\ que\ tarda\ en\ hacer\ la\ portabilidad\ de\ un\ número\ (horas)$$
$$n = 16\ (tamaño\ de\ la\ muesta)$$

Nos piden calcular la probabilidad de que la media muestral supere las 48 horas $P(\bar{x} > 48)$.
Para calcular dicho valor recurriremos a la tabla adjunta de la distribución normal N (0, 1). Como la variable 'x' no sigue una distribución normal N (0, 1), tenemos que transformar la variable aleatoria 'x' en otra variable 'z' (tipificación de la variable) que si la siga.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma'} \rightarrow \bar{x}: N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{x}}\right) = N(\mu, \sigma') = N(36, 6) \begin{cases} \mu = 36 \\ \sigma' = 6 \end{cases}$$

$$P(\bar{x} > 48) = P\left(z > \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma'}\right) = P\left(z > \frac{48 - 36}{6}\right) = P(z > 2) = 1 - P(z \leq 2)$$

$$P(\bar{x} > 48) = 1 - P(z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0288 = \mathbf{2{,}28}\%$$

En la tabla N (0, 1) sólo encontramos las probabilidades P (z ≤ k), por eso hemos realizado el cambio anterior.

Solución: La probabilidad de que la media muestral supere las 48 horas es del 2,28%.

b) El nivel de confianza es un indicador de la precisión de la medición que hemos hecho dentro de un intervalo (24,24; 47,76) para μ = 36 horas.

$$P(24{,}24 < \bar{x} < 47{,}76) \rightarrow Tipificamos \begin{cases} \bar{x} = 24{,}24 \rightarrow z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma'} = \frac{24{,}24 - 36}{6} = -1{,}96 \\ \bar{x} = 47{,}76 \rightarrow z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma'} = \frac{47{,}76 - 36}{6} = 1{,}96 \end{cases}$$

$$P(24{,}24 < \bar{x} < 47{,}76) \rightarrow P(-1{,}96 < z < 1{,}96) = P(z < 1{,}96) - P(z \leq -1{,}96) =$$
$$= P(z < 1{,}96) - P(z \geq 1{,}96) = P(z < 1{,}96) - \left(1 - P(z < 1{,}96)\right) = 2P(z < 1{,}96) - 1$$

$$P(24{,}24 < \bar{x} < 47{,}76) = 2P(z < 1{,}96) - 1 = 2 \cdot 0{,}9750 - 1 = 0{,}095 = \mathbf{95}\%$$

Solución: El nivel de confianza con el que se han hecho los cálculos es del 95%.

SOLUCIONES EXAMEN EvAU SEPTIEMBRE 2017

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérense las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínese la matriz C^{40}.
b) Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$.

a) Calculamos primero C · C y así comprobamos si hay alguna regla que nos de información para obtener la matriz que nos piden.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)+0\cdot 3 & (-1)\cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 3 & 3\cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos damos cuenta de que C · C = I (matriz identidad)

Y sabemos que C · I = C, luego $C^3 = C$.

Podemos decir entonces que si calculamos C^n: cuando n es par, nos va a dar la matriz identidad y cuando n es impar nos da la matriz C; por tanto, $C^{40} = I$

b) Despejamos X: $X \cdot A + 3B = C \rightarrow X \cdot A = C - 3B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - 3B)\cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot I = (C - 3B)\cdot A^{-1} \rightarrow$
$X = (C - 3B)\cdot A^{-1}$

Calculamos ahora la inversa de la matriz A.
Según la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$|A\,| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(Adj\ A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow (Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3 & 0-9 \\ 3-6 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{17} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2-1}{3x-2}$$

a) Estúdiense sus asíntotas.
b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

a) Asíntotas verticales: son las rectas que cumplen $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ entonces x = a hay una asíntota vertical

En las funciones racionales como la del examen, $f(x) = \frac{x^2-1}{3x-2}$, para determinar el valor de a, en primer lugar lo que hacemos es calcular el dominio:

D (f(x)) = R – {2/3}

Por tanto comprobamos si en a = 2/3 hay una asíntota vertical

$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{x^2-1}{3x-2} = \frac{-5/9}{0} = -\infty$ luego en **x = 2/3 hay una asíntota vertical**

Asíntota horizontal: se calcula el $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, si se cumple esto, decimos que en y = b hay una asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{3x-2} = \frac{\infty}{\infty} \dashrightarrow resolvemos\ la\ indeterminación:$$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{3x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x}{x^2}-\frac{2}{x^2}} = \frac{1}{0} = \pm\infty$ → en este caso, podemos decir que **no hay asíntotas horizontales**.

Asíntotas oblicuas: Como no hay asíntota horizontal, buscamos asíntotas oblicuas que es tiene que ser y = mx + n, siendo

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{3x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{3x^2-2x} = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{3x-2} - \frac{1}{3}x = \lim_{x\to\infty} \frac{3(x^2-1)-x(3x-2)}{(3x-2)\cdot 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{9x-6} = \frac{2}{9}$$

Hay una asíntota oblicua en y = $\boldsymbol{\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}}$

b) Para saber cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculamos, en primer lugar, la primera derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{2x\,(3x-2) - (x^2-1)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2-4x-3x^2+3}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}$$

Ahora, igualamos la derivada a cero y así calculamos los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \dashrightarrow \frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2} = 0 \dashrightarrow 3x^2-4x+3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-36}}{6} \notin R$$

Como no se anula la derivada, vemos que valores toma la derivada en el dominio de definición de la función y vemos que f'(x) > 0 ∀ x ∈ R – {2/3}

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

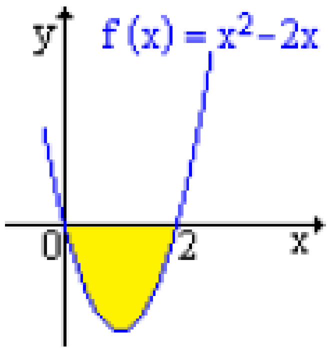
$$f(x) = x^2 + ax$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función f(x) tenga un extremo relativo en x = 2. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.
b) Para a = -2, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de f(x), el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 2.

a) Para que la función tenga un extremo relativo en x = 2, se debe cumplir que f'(2) = 0 y f''(2) > 0.
$f(x) = x^2 + ax \rightarrow f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 + a = 4 + a \rightarrow 4 + a = 0 \rightarrow a = -4$

$f''(x) = 2 \rightarrow f''(2) > 0 \rightarrow$ **en x = 2 hay un mínimo, en la función $f(x) = x^2 - 4x$ y en el punto (2, -4)**

b) $f(x) = x^2 - 2x$. Nos piden el área siguiente:



Y para ello, calculamos la integral definida comprendida entre los puntos 0 y 2.

$$A = \int_0^2 x^2 - 2x\,dx = \left|\int_0^2 x^2 - 2x\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_0^2\right| = \left|\left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0^2\right)\right| = \boldsymbol{\frac{4}{3}\,u^2}$$

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0'6, por sulfatos es 0'4, y por ambos es 0'2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.
b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

a) A = El río está contaminado por nitratos B = El río está contaminado por sulfatos.

P(A) = 0'6 P(B) = 0'4 P(A ∩ B) = 0'2 P($\bar{A}$) = 0'4 P($\bar{B}$) = 0'6

La probabilidad de que dicho río no esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos:

Utilizamos Bayes:

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P\,(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0'4 - 0'2}{0'4} = \mathbf{0'5}$$

b) Probabilidad de que el río no esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P\,(\overline{A \cup B}) = 1 - [P\,(A) - P(A \cap N)] = 1 - (0'6 + 00'4 - 0'2) = \mathbf{0'2}$$

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 0'6 cm.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\bar{x}$ = 7 cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98% para μ.
b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea a lo sumo 0'1 cm, con un nivel de confianza del 98% ?

a) X: N(μ, σ) → X: N(μ, 0'6)
Para la muestra de n = 100, la distribución es: $\bar{x}: N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{100}}\right)$
El intervalo de confianza para la media poblacional a partir de la media muestral es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para el intervalo de confianza al 98%: 1 – α = 0'98

α = 0'02 → α/2 = 0'01 luego 1 – α = 1 – 0'01 = 0'99, al buscar en las tablas el valor de zα/2 que da el valor 0'99, comprobamos que es 2'33. Por tanto, el intervalo en el que se encontrará la estatura media será:

$$\left(\mathbf{7 - 2'33 \frac{0'6}{\sqrt{100}}, 7 + 2'33 \frac{0'6}{\sqrt{100}}}\right) = (\mathbf{6'86; 7'14})$$

b) Calculamos el tamaño muestral a partir del error de estimación:
$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, y despejando n queda:

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{E^2}$$

$$n > \left(2'33 \cdot \frac{0'6}{00'1}\right)^2 = 195'4 \longrightarrow \boldsymbol{n \geq 196\ elementos}$$