EXAMEN MATEMÁTICAS II

Universidad Complutense de Madrid

Convocatoria Extraordinaria. Curso 2018-2019

OPCIÓN A

1.

a)

$$A=\begin{pmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -k-1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-2k^2+2=-2(k^2-1)\rightarrow |A|=-2(k^2-1)=0\rightarrow k=\pm 1$$

- Cuando $k\neq \pm 1 \rightarrow RgA=3$
- Cuando $k=\pm 1 \rightarrow RgA=2 \rightarrow |A|_2=\begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$

Estudiamos el rango de A*:

- Cuando $k\neq \pm 1 \rightarrow RgA^*=3 \rightarrow |A^*|=|A|\neq 0$
- Cuando $k=-1 \rightarrow RgA^*=2 \rightarrow |A^*|_3=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow |A^*|_2=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$

$$A^*=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cuando $k=1 \rightarrow RgA^*=3 \rightarrow |A^*|_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Conclusión:

- **Cuando** $\boldsymbol{k \neq \pm 1 \rightarrow RgA = RgA^{*} = 3 \rightarrow SCD}$
- **Cuando** $\boldsymbol{k = 1 \rightarrow RgA \neq RgA^{*} \rightarrow SI}$
- **Cuando** $\boldsymbol{k = -1 \rightarrow RgA = RgA^{*} = 2 \rightarrow SCI}$

b)

Cuando k = -1 el sistema tiene infinitas soluciones para cada incógnita (SCI), de hecho es un sistema homogéneo.

$$\begin{cases} -x+z=0 \\ -x-y-z=0 \\ -2x-y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases} \rightarrow -2x-y=0 \rightarrow y=-2x \rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-2x=-2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=z \\ y=-2x=-2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=t} \\ \boldsymbol{y=-2t} \ \ \forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{z=t} \end{cases}$$

Solución: x = t, y = -2t, z = t

2.

a)

Tenemos dos funciones f y g derivables de las cuales conocemos los siguientes datos:

$$f(1)=1;\ f'(1)=2; g(1)=3; g'(1)=4$$

Dada la función: $h(x)=f[(x+1)^2]$

Se pide calcular la derivada de dicha función en x = 0.

Aplicando la regla de la cadena:

$$h(x)=f[(x+1)^2] \rightarrow h'(x)=f'[(x+1)^2]\cdot 2(x+1)$$

$$h'(0)=f'[(0+1)^2]\cdot 2(0+1)=f'(1)\cdot 2=2\cdot 2=\mathbf{4}$$

De la misma manera, dada la función**:** $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, se pide calcular la derivada de la función en x = 1.
Aplicando la regla de la cadena:

$$k(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow k'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$k'(1)=\frac{f'(1)\cdot g(1)-f(1)\cdot g'(1)}{g^2(1)}=\frac{2\cdot 3-1\cdot 4}{3^2}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

Soluciones: $\boldsymbol{h'(0)=4}$ **y** $\boldsymbol{k'(1)=2/9}$

b)

$$I=\int (sen\,x)^4\cdot(\cos x)^3 dx=\int (sen^4\,x)\cdot(cos^2\,x)\cdot(\cos x)dx=\int (sen^4\,x)\cdot(1-sen^2\,x)\cdot(\cos x)dx$$

$$\int (sen^4\,x)\cdot(1-sen^2\,x)\cdot(\cos x)dx\to Cambio\ de\ variable\ (CV)\begin{cases} sen\,x=\mathrm{t}\\ \cos x\,dx=dt\end{cases}$$

$$I=\int (sen^4\,x)\cdot(1-sen^2\,x)\cdot(\cos x)dx=\int t^4\cdot(1-t^2)\cdot dt=\int (t^4-t^6)\,dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C$$

$$Deshago\ CV\begin{cases} sen\,x=\mathrm{t}\\ \cos x\,dx=dt\end{cases}\to I=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+C=\frac{sen^5 x}{5}-\frac{sen^7 x}{7}+C$$

Solución: $\boldsymbol{I=\frac{sen^5 x}{5}-\frac{sen^7 x}{7}+C}$

3.

a)

Definimos un plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\pi\begin{cases} A(1,1,1)\\ B(1,3,-3)\\ C(-3,-1,1)\end{cases}\to\pi\begin{cases} A(1,1,1)\to Punto\ de\ \pi\\ \overrightarrow{AB}(0,2,-4)\to Vect.director\ de\ \pi\\ \overrightarrow{AC}(-4,-2,0)\to Vect.director\ de\ \pi\end{cases}$$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1\\ 0 & 2 & -4\\ -4 & -2 & 0\end{vmatrix}=0\to[0+0+16(y-1)]-[-8(z-1)+8(x-1)+0]=0$$

$$\pi\equiv -8x+16y+8z-16=0\to\boldsymbol{\pi\equiv -x+2y+z-2=0}$$

Solución: La ecuación general del plano es: $\boldsymbol{\pi\equiv -x+2y+z-2=0}$

b)

Buscamos un punto D, tal que los vectores $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\ y\ \overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes, o lo que es lo mismo, que pertenezcan al mismo plano.

Cualquier punto perteneciente al plano formado por $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$, y que pase por el punto A (plano calculado en el apartado anterior), cumplirá la condición mencionada en el párrafo anterior.

$$Punto\ D \in \pi \rightarrow Punto\ que\ cumpla\ la\ ecuación: -x+2y+z-2=0 \rightarrow Por\ ej. \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow D(0,1,0)$$

Solución: $\boldsymbol{D=(0,1,0)}$

c)

Las coordenadas de un punto P perteneciente al eje OX, que forma un tetraedro junto con los vértices A, B y C, cuyo volumen es 1, se calcula:

$$\begin{cases} A(1,1,1) \\ P(x,0,0) \rightarrow Punto\ del\ eje\ OX \end{cases} \begin{cases} \overrightarrow{AP}(x-1,-1,-1) \\ \overrightarrow{AB}(0,2,-4) \\ \overrightarrow{AC}(-4,-2,0) \end{cases}$$

$$V_T=\frac{\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right|}{6}=1 \rightarrow \left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right| = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8x-16$$

$$V_T=\frac{|-8x-16|}{6}=1 \rightarrow \begin{cases} V_T=\dfrac{-8x-16}{6}=1 \rightarrow -8x-16=6 \rightarrow x=-\dfrac{11}{4} \\ V_T=\dfrac{-(-8x-16)}{6}=1 \rightarrow 8x+16=6 \rightarrow x=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Solución: Hay dos puntos que cumplen esta condición: $\boldsymbol{P=\left(-\frac{11}{4},0,0\right)\ y\ P'=\left(-\frac{5}{4},0,0\right)}$

4.

a)

La variable de estudio es discreta y se ajusta a una distribución binomial, ya que sigue un esquema éxito-fracaso.

$$X='Número\ de\ amigos\ seleccionados' \begin{cases} Éxito: Ser\ seleccionado \\ Fracaso: No\ ser\ seleccionado \end{cases}$$

$$X \rightarrow B(p,q) \begin{cases} Probabilidad\ de\ éxito \rightarrow p=0{,}4 \\ Probabilidad\ de\ fracaso \rightarrow q=1-p=0{,}6 \end{cases}$$

Dada una muestra de 8 amigos (n = 8) queremos calcular la probabilidad de que al menos dos de ellos hayan sido seleccionados.

$$P(X=a)=\binom{n}{a}\cdot p^{a}\cdot q^{n-a}\rightarrow\binom{n}{a}=\frac{n!}{a!\,(n-a)!}$$

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]\begin{cases}P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0{,}4^{0}\cdot 0{,}6^{8-0}\\ P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot 0{,}4^{1}\cdot 0{,}6^{8-1}\end{cases}$$

$$P(X\geq 2)=1-[0{,}6^{8}+(8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^{7})]=0{,}8936=\mathbf{89{,}36}\%$$

Solución: La probabilidad de que al menos dos amigos sean seleccionados es del $\mathbf{89{,}36}\%$.

b)

En este caso la variable de estudio cambia, es una variable continua, y se ajusta a una distribución normal. Siendo:

$$X='\,Puntuaciones\ obtenidas\ por\ los\ aspirantes\ en\ el\ proceso\ de\ selección'$$

$$X\rightarrow N(\mu,\sigma)\begin{cases}Media\rightarrow\ \mu=5{,}6\\ Desviación\ típica\rightarrow\sigma\end{cases}$$

Sabemos que: $P(X\leq 8{,}2)=0{,}67$. Con este dato nos piden calcular la desviación típica.

Para calcular la probabilidad de que la variable tome un valor determinado es necesario tipificar la variable, para así poder entrar en la tabla de distribución normal.

$$P(X\leq a)\rightarrow Tipificamos\ la\ variable{:}\ Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-20}{\sqrt{18}}$$

$$P(X\leq 8{,}2)=P\left(\frac{X-5{,}6}{\sigma}\leq\frac{8{,}2-5{,}6}{\sigma}\right)=P\left(Z\leq\frac{2{,}6}{\sigma}\right)=0{,}67\rightarrow Tabla{:}\ \frac{2{,}6}{\sigma}=0{,}44$$

$$\frac{2{,}6}{\sigma}=0{,}44\rightarrow\sigma=0{,}44\cdot 2{,}6=\mathbf{5{,}91}$$

Solución: El valor de la desviación típica es 5,91.

OPCIÓN B

1.

a)

Los valores de *a* para los cuales se cumple que: $A^2 - I = 2A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)^2+1 & (1-a)+(1+a) \\ (1-a)+(1+a) & 1+(1+a)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - I = 2A \rightarrow \begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+1 & 2 \\ 2 & a^2+2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(1-a) & 2 \\ 2 & 2\cdot(1+a) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a^2-2a+1 = 2-2a \rightarrow a^2-1=0 \\ a^2+2a+1 = 2+2a \rightarrow a^2-1=0 \end{cases}$$

$$a^2 - 1 = 0 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

Solución: Cuando $a = \pm 1$ se cumple la igualdad $A^2 - I = 2A$.

b)

Una matriz admite inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1-a)(1+a) - 1 = -a^2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow -a^2 = 0 \rightarrow a = 0$$

En este caso, cuando el parámetro $a \neq 0$, la matriz A tendrá inversa.

La matriz inversa, en función de *a* será:

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A^T}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} \rightarrow Adj\ A^T = Adj\ A = \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A^T}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}}{-a^2} = \frac{1}{-a^2} \cdot \begin{pmatrix} 1+a & -1 \\ -1 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{-1+a}{a^2} \end{pmatrix}$$

Solución: $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{-1-a}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{-1+a}{a^2} \end{pmatrix}$

c)

Calculamos $|A \cdot A^T|^2$ en función del parámetro a. Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$|A| = -a^2;\ |A^T| = |A| = -a^2$$

$$|A \cdot A^T|^2 = |A|^2 \cdot |A^T|^2 = (-a^2)^2 \cdot (-a^2)^2 = a^4 \cdot a^4 = a^8$$

Solución: $\boldsymbol{\left|A \cdot A^T\right|^2 = a^8}$

2.

a)

La función que permite calcular en número de enfermos en función del tiempo que ha transcurrido es F(t). No conocemos la función, pero sí su derivada:

$$F(t) \to F'(t) = t^2(10-t)$$

Si integramos la derivada obtenemos la función:

$$F(t) = \int F'(t)\,dt = \int t^2(10-t)\,dt = \int (-t^3 + 10t^2)\,dt = -\frac{t^4}{4} + \frac{10t^3}{3} + C$$

Necesitamos conocer el valor de la función en un punto para calcular la constante de integración. En el enunciado nos dicen que inicialmente había 6 personas afectadas, por lo que:

$$F(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{10t^3}{3} + C \to F(0) = -\frac{0^4}{4} + \frac{10 \cdot 0^3}{3} + C = 6 \to C = 6$$

Solución: $\boldsymbol{F(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{10t^3}{3} + 6}$

b)

Para calcular cuántos días después de comenzar el brote se alcanza el número máximo de enfermos tenemos que estudiar cuando alcanza la función F(t) su máximo valor, es decir, los valores de t para los cuales F'(t) se anula.

$$F'(t) = t^2(10-t) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases} \to \forall t = 10\ día \quad F(10) = -\frac{10^4}{4} + \frac{10^4}{3} + 6 = 839{,}33 \approx 839\ enfermos$$

Solución: El décimo día se produce el máximo número de enfermos, concretamente 839 enfermos.

c)

El Teorema de Bolzano nos permite conocer la evolución de la monotonía de una función continua en un intervalo determinado. Este teorema afirma que, si la función es continua y cumple una serie de condiciones, existe al menos un punto crítico dentro de un intervalo cerrado.

En este ejercicio es interesante conocer cómo evoluciona el número de enfermos a lo largo del tiempo. La aplicación del Teorema de Bolzano nos va a permitir saberlo.

Como la función que permite conocer el número de enfermos depende del tiempo, su dominio será:

$$D = [0, +\infty) \rightarrow La\ función\ F(t)\ es\ continua\ en\ este\ intervalo$$

Estudiamos diferentes intervalos. Elegimos intervalos de amplitud 1 día por ejemplo.

t	1	2	…	13	14
$F(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{10t^3}{3} + 6$	$F(1) = 9{,}1$	$F(2) = 28{,}7$		$F(13) = 189{,}1$	$F(14) = -451{,}3$

Es imposible tener un número negativo de enfermos, por lo que en el intervalo $[13, 14]$ finalizará el brote de la enfermedad. Estudiamos en profundidad este intervalo aplicando el Teorema de Bolzano.

Como F(t) es continua en el intervalo $[13, 14]$, y F(13) > 0 y F(14) < 0, existe al menos un punto c perteneciente al intervalo $(13, 14)$ para el que la función se anula (punto donde finaliza el brote).

Solución: Pasados 14 días finaliza el brote.

3.

a)

Para calcular el punto simétrico de P con respecto al plano π tenemos que:

1) Calcular una recta t perpendicular a π que pase por P.
2) Realizar la intersección del plano π con la recta r, obteniendo el punto M.
3) Podemos calcular el punto buscado (punto Q) sabiendo que el punto M es el punto medio del segmento PQ.

Calculamos entonces la ecuación de una recta perpendicular a π que pase por P:

$$t \equiv \begin{cases} P = (1, 2, 3) \\ \overrightarrow{u_t} = \vec{n}_\pi = (2, 3, -1) \end{cases} \rightarrow t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$$

La intersección de t con el plano π se realiza resolviendo el sistema formado por ambos elementos geométricos:

$$t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1} \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} \to 3x = 2y - 1 \to x = \dfrac{2y-1}{3} \\ \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{-1} \to 3z = -y + 11 \to z = \dfrac{-y+11}{3} \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x + 3y - z = 4 \to 2\left(\frac{2y-1}{3}\right) + 3y - \left(\frac{-y+11}{3}\right) = 4 \to 14y - 13 = 12 \to y = \frac{25}{14}$$

$$y = \frac{25}{14} \begin{cases} x = \dfrac{2y-1}{3} = \dfrac{6}{7} \\ z = \dfrac{-y+11}{3} = \dfrac{43}{14} \end{cases}$$

$$t \cap \pi = M \to M = \left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right)$$

Como el punto M es el punto medio del segmento PQ:

$$M = \left(\frac{q_x - 1}{2}, \frac{q_y - 2}{2}, \frac{q_z - 3}{2}\right) \to \begin{cases} M = \left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{25}{14}, \dfrac{43}{14}\right) \\ P = (1, 2, 3) \\ Q = (x, y, z) \end{cases}$$

$$\left(\frac{6}{7}, \frac{25}{14}, \frac{43}{14}\right) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y-2}{2}, \frac{z-3}{2}\right) \to \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{6}{7} \to x = \dfrac{5}{7} \\ \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{25}{14} \to y = \dfrac{11}{7} \\ \dfrac{z-3}{2} = \dfrac{43}{14} \to z = \dfrac{22}{2} \end{cases}$$

Solución: El punto simétrico a P con respecto al plano π es el punto: $\boldsymbol{Q = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{2}\right)}$

b)

Para responder a este apartado primero tenemos que calcular el punto de corte de las rectas r y s. Para ello resuelvo el sistema formado por éstas.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases} ; \; s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$$

$$s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1) \to s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1} \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} \to y - 2 = 0 \to y = 2 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{z-3}{1} \to x = z - 2 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=z-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (z-2)+2-z=0 \\ (z-2)+2+z=2 \end{cases} \rightarrow 2z=2 \rightarrow z=1$$

$$z=1 \rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=z-2=-1 \end{cases} \rightarrow R=r\cap s \rightarrow R=(-1,2,1)$$

La recta perpendicular al plano que pasa por el punto R tiene las siguientes características:

$$r' \equiv \begin{cases} R=(-1,2,1) \\ \overrightarrow{u_{r'}}=\vec{n}_\pi=(2,3,-1) \end{cases} \rightarrow r' \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-1}$$

Solución: La ecuación de la recta pedida es: $\boldsymbol{r' \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{-1}}$

c)

El ángulo formado por las rectas r y s será el mismo que el ángulo formado por sus vectores directores:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \rightarrow x+y=z=1 \begin{cases} x=\gamma \\ y=1-\gamma \\ z=1 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0)$$

$$s \equiv (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,1) \rightarrow \overrightarrow{u_s}=(1,0,1)$$

$$\widehat{r,s}=\alpha \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,0,1) \end{cases} \rightarrow \alpha=cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}\right)=cos^{-1}\left(\frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)$$

$$\alpha=cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60°$$

Solución: El ángulo que forman las rectas r y s es de 60^0

4.

a)

Inicialmente definimos los sucesos:

- Suceso A: Existencias de vehículos de gama alta.
- Suceso B: Existencias de vehículos de gama baja.
- Suceso C: Vehículos defectuosos.
- Suceso $\overline{C}$: Vehículos no defectuosos.

Sabemos que:

- Sabemos que el 1/3 de los vehículos son de gama alta, es decir: P(A) = 1/3
- Entonces el porcentaje de vehículos de gama baja es: P(B) = 1 - P(A) = 2/3
- Además, el 1,6 % de los vehículos de gama baja tienen algún defecto: P(C/B) = 0,016

- Y el porcentaje de vehículos de gama alta que tienen algún defecto es del 0,9 %: P(C/A) = 0,009

Si elegimos un vehículo al azar, la probabilidad de que el vehículo sea defectuoso será:

$$P(C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}009 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}016 = 0{,}0137 = \mathbf{1{,}37}\%$$

b)

La probabilidad de un vehículo sea de gama baja, elegido al azar, sea defectuoso se calcula aplicando el Teorema de Bayes.

$$P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B) \cdot P(C/B)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}016}{0{,}0137} = 0{,}7805 = \mathbf{78{,}05}\ \%$$