Matemáticas aplicadas a las CCSS, examen de junio, curso 2018-19

OPCIÓN A

1. Se consideran las siguientes matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7}\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{3}\end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante $\boldsymbol{k}$ para que el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}-\mathbf{2}\boldsymbol{B}$ sea nulo.

La ecuación matricial a calcular es la siguiente: $|A-2B|=0$

Teniendo esto en cuenta, se reemplaza por las matrices A y B:

$$\begin{pmatrix}k & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 1 & 2\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 8 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k-2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -8 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

A continuación, se resuelve el determinante y su resultado se iguala a 0.

$$\begin{vmatrix}k-2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -8 & 0 & 1\end{vmatrix}=2(k-2)-24-1=0 \rightarrow 2k-4-24-1=0$$

$$\rightarrow 2k=29 \rightarrow k=\frac{29}{2}$$

Para que el determinante sea nulo, k deberá valer $\frac{29}{2}$.

b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Para que una matriz pueda ser invertible, es necesario que ésta sea cuadrada. Teniendo esto en cuenta, y dado que la matriz C es rectangular, ésta no será invertible.

En cuanto a $C^t \cdot C$, es necesario, en primer lugar, determinar la traspuesta de C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguidamente, se comprueban las dimensiones del producto $C^t \cdot C$:

$$C^t_{2\times 3} \cdot C_{3\times 2} = (C^t \cdot C)_{2\times 2}$$

Como el resultado es una matriz cuadrada, es susceptible de que exista inversa.

Así pues, se calculará $C^t \cdot C$, y a continuación se calculará su determinante:

$$C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|C^t \cdot C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Dado que el determinante de $C^t \cdot C$ es no nulo, sí que existe inversa. Así pues, ésta se determinará mediante el siguiente procedimiento:

$$A^{-1} = \frac{\left(Adj(A)\right)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas.
Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene.
Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) **Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.**

En primer lugar, se nombrarán a las variables, y sobre eso se establecerán las relaciones que hay entre todos los datos dados:

Helado: x	Horchata: y

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$$

Una vez obtenidas las inecuaciones que conforman la región factible, se procederá a representarlas:

Finalmente, se determinarán las coordenadas que delimitan la región factible, siendo éstas:

A: $(0,10)$	B: $(15; 2'5)$	C: $(15,0)$	D: $(10,0)$

b) **Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.**

Primeramente, se elaborará la función objetivo:

$$Max\ B(x,y) = 25x + 12y$$

Y a continuación, se sustituirán cada una de las coordenadas obtenidas en el apartado a), a fin de obtener el valor máximo:

$$B_A(0{,}10) = 120€$$
$$B_B(15; 2'5) = 405€$$
$$B_C(15{,}0) = 300€$$
$$B_D(10{,}0) = 250€$$

El beneficio máximo se alcanza en la combinación $(15; 2'5)$, por lo que lo óptimo será producir 15 litros de helado, y 2’5 litros de horchata; obteniéndose con ello un beneficio máximo de 405€.

3. La derivada de la función real de la variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{f'(x) = 2x^2 - 4x - 6}$$

a) Obténgase la expresión de la función sabiendo que pasa por el punto (0,3)

En primer lugar, se calculará la integral indefinida de la función:

$$\int (2x^2 - 4x - 6)dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + c \equiv f(x)$$

Seguidamente, dado que se indica que la función pasa por (0,3), es necesario hacer la relación $f(0) = 3$, y sobre eso despejar la constante c:

$$f(0) = \frac{2(0)^3}{3} - 2(0)^2 - 6(0) + c = 3 \rightarrow c = 3$$

Por tanto, la expresión de la función $f(x)$ será:

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$$

b) Determínense los extremos relativos de la función f(x) indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad (∪) y convexidad (∩).

Primeramente, se igualará a cero la derivada, para sobre eso obtener puntos críticos:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

A continuación, se calculará la segunda derivada de la función, y se sustituirán en ella los puntos críticos:

$$f''(x) = 4x - 6 \rightarrow \begin{cases} f''(3) = 4 \times 3 - 6 = 6 > 0 \rightarrow Míximo\ en\ x = 3 \\ f''(-1) = 4 \times (-1) - 6 = -10 < 0 \rightarrow Máximo\ en\ x = -1 \end{cases}$$

Para estudiar la concavidad y convexidad de la función, se igualará la segunda derivada a 0, y se despejará la x. Seguidamente, se tomarán valores a la izquierda y derecha de dicha x, y se sustituirán en la segunda derivada:

$$f''(x) = 4x - 6 = 0 \rightarrow 4x = 6 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f''(0) = 4(0) - 6 = -6 \rightarrow Convexo$$
$$f''(2) = 4(2) - 6 = 2 \rightarrow Cóncavo$$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty; 3/2)$, y cóncava en el intervalo $(3/2; \infty)$.

4. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$\boldsymbol{P(A) = 0'6,\ P(B) = 0'8} \textbf{ y } \boldsymbol{P(A \cap B^C) = 0'1.}$$

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B

$$P(A \,/\, B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{0'1}{1 - 0'8} = \frac{0'1}{0'2} = \frac{1}{2} = 0'5$$

La probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B es del 50%

Y determínese si los sucesos A y B son independientes:

Para comprobar si dos sucesos son dependientes o independientes, es necesario obtener la intersección de A y B por dos vías:

1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \rightarrow P(A \cap B) = 0'6 \times 0'8 \rightarrow P(A \cap B) = 0'48$

2) $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^C) \rightarrow$

$$0'1 = 0'6 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0'6 - 0'1 \rightarrow P(A \cap B) = 0'5$$

Una vez despejadas las intersecciones por ambos cálculos, se comparan:

$$0'48 \neq 0'5$$

Como no coinciden, se concluye que A y B son sucesos dependientes

b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'6 + 0'8 - 0'5 = 0'9}$$

La probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos es del 90%

5. El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2% para estimar el precio medio mensual,μ, de las clases de Pilates.

$$IC(\mu)_{0'992} = \left(34 \pm 2'65 \sqrt[2]{\frac{49}{64}}\right) = (31'68; 36'32)$$

El intervalo de confianza para la media es $(31'68; 36'32)$

NOTA: para obtener $z_{\alpha/2}$ se ha utilizado el siguiente procedimiento:

$$1-\alpha = 0'992 \rightarrow \alpha = 0'008 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'004 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0'996 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2'65$$

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95%.

$$n = \left(\frac{1'96 \times 7}{3}\right)^2 = 20'91 \cong 21\ centros$$

La muestra debe tener un tamaño mínimo de 21 centros.

NOTA: para obtener $z_{\alpha/2}$ se ha utilizado el siguiente procedimiento:

$$1-\alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$$

OPCIÓN B

1. **Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m:**

$$\left.\begin{aligned} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{aligned}\right\}$$

a) **Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.**

Para resolver este apartado, es necesario comprar los rangos de las matrices A y A^*. Ello se hará de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{aligned}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 0 \end{array}\right)$$

$$|A|=0 \to |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = -m^2-2m-1=0 \to$$

$$\to m = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = 1 \to m=-1$$

Discusión:

Caso 1: $m \neq 1 \to |A| \neq 0 \to Rg(A)=3$

$$(A^*) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & m & \cancel{0} \\ 1 & -1 & \cancel{0} \end{pmatrix} \to |A^*|=0 \to Rg(A^*)<3$$

$$Rg(A) \neq Rg(A^*) \to Sistema\ Incompatible$$

Esto indica que la única solución válida para el sistema es la solución trivial $x=y=z=0$

Caso 2: $m = 1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rg(A) < 3$

$$(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

$$|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg(A) < 2$$

$$|M_{1x1}| = |-1| = -1 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 1$$

$$(A^{*}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & -1 & \cancel{0} \\ 1 & -1 & \cancel{0} \end{pmatrix} \rightarrow |A^{*}| = 0 \rightarrow Rg(A^{*}) < 3$$

$$|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg(A^{*}) < 2$$

$$|M_{1x1}| = |-1| = -1 \neq 0 \rightarrow Rg(A^{*}) = 1$$

$$Rg(A) = Rg(A^{*}) \neq N^{o}\, incógnitas \rightarrow SCI$$

Resolución para un sistema de infinitas soluciones:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ \cancel{x - y - z = 0} \\ \cancel{x - y + z = 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y = \lambda \\ z = \delta \end{cases} \rightarrow -x + \lambda + \delta = 0 \rightarrow x = \lambda + \delta$$

Solución: $(x, y, z) = (\lambda + \delta, \lambda, \delta)$

b) **Resuélvase el sistema para $m = 1$.**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A] = -m^{2} - 2m - 1 \rightarrow |A] = -4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = 0$$

Solución: $(x, y, z) = (0,0,0)$

2. Se considera la función real de variable real:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese:

Cálculo de intervalos de crecimiento y decrecimiento:

i) Se comprueba el dominio de $f(x)$:

$$x^2 + 4 = 0 \to x^2 = -4 \to x = \pm\sqrt[2]{-4} = \nexists \to Dom\ f(x) = \mathbb{R}$$

ii) Se calcula $f'(x) = 0$ para obtener puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2 + 4)^2} = 0 \to -16x = 0 \to x = 0$$

iii) Se hacen intervalos con los puntos del dominio y los puntos críticos, y se escogen números dentro de dichos intervalos. Posteriormente se sustituyen en $f'(x)$:

$$(-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f'(-1) > 0 \to Crece \to Intervalo\ de\ Crecimiento: (-\infty, 0)$$
$$f'(1) < 0 \to Decrece \to Intervalo\ de\ Decrecimiento: (0, \infty)$$

Cálculo de asíntotas:

Asíntota Vertical: $f(x)$ es continua en todo su dominio, por lo que no tiene AV.

Asíntota Horizontal:

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \end{cases}$$

La función $f(x)$ tiene una AH en $x = 0$ y no tiene Asíntota Oblicua.

b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $x = 2$

Cálculo de la ecuación de la recta tangente:

i) $f(2) = \frac{8}{2^2+4} = 1 \rightarrow y = 1$

ii) $f'(2) = \frac{-16\times 2}{(2^2+4)^2} = -\frac{1}{2} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$

iii) $y = mx + n \rightarrow 1 = -\frac{1}{2} \times 2 + n \rightarrow n = 2 \rightarrow y = -\frac{x}{2} + 2$

La ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{x}{2} + 2$

3. La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 \text{ si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} \text{ si } x > 3 \end{cases}$$

a) Analice la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio según los valores de k.

Continuidad en $x = 0$

$$f(0) = \lim_{x\rightarrow 0} f(x)$$

i) $f(0) = e^0 + k \rightarrow f(0) = 1 + k$

ii) $\lim_{x\rightarrow 0} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\rightarrow 0^-} f(x) = 1 + k \\ \lim_{x\rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x\rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow$

$$\rightarrow 1 + k = 1 \rightarrow k = 0$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, es necesario que $k = 0$.

Continuidad en $x = 3$

$$f(3) = \lim_{x\rightarrow 3} f(x)$$

i) $f(3) = -8$

ii) $\lim_{x\rightarrow 3} f(x) \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\rightarrow 3^-} f(x) = -8 \\ \lim_{x\rightarrow 3^+} f(x) = \infty \end{cases} \rightarrow \lim_{x\rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x\rightarrow 3^+} f(x)$

Para que $f(x)$ no es continua en $x = 3$

b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} e^x \; si \; x \leq 0 \\ 1 - x^2 \; si \; 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} \; si \; x > 3 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{1} f(x) dx = \int_{-1}^{0} e^x dx + \int_{0}^{1} (1 - x^2) dx$$

$$\int_{-1}^{0} e^x dx$$

i) Para el tramo de función, se comprueba si hay algún valor de x que haga que la función pase por debajo del eje de abscisas:

$$e^x = 0 \rightarrow No\ hay\ ningún\ valor\ para\ x\ que\ cumpla\ la\ ecuación$$

ii) Dado que no existe ningún valor para x cumpla $e^x = 0$, puede afirmarse que e^x siempre pasará por encima del eje de abscisas, y por tanto siempre tendrá imagen positiva. Así pues, el área resultante sería la siguiente:

$$\int_{-1}^{0} e^x dx = [e^x]_{-1}^{0} \cong 0'63\ u^2$$

$$\int_0^1 (1 - x^2)dx$$

i) Para el tramo de función, se comprueba si hay algún valor de x que haga que la función pase por debajo del eje de abscisas:

$$1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt[2]{1} \rightarrow x = \pm 1$$

La función tiene puntos de corte en $x = -1$ y $x = 1$. Dado que el tramo de la integral abarca el intervalo $[0,1]$, se tomará un valor de x dentro de este intervalo, y se sustituirá en el tramo a fin de comprobar si la imagen de $f(x)$ quedará por encima o por debajo del eje de abscisas:

$$[0,1] \rightarrow x = 0'5 \rightarrow f(0'5) = 1 - 0'5^2 > 0$$

El resultado obtenido es positivo, por lo que la función tiene imagen positiva en el intervalo $[0,1]$.

ii) Así pues, el área resultante será la siguiente:

$$\int_0^1 (1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) \cong 0'66u^2$$

Teniendo lo anterior en cuenta el área total será:

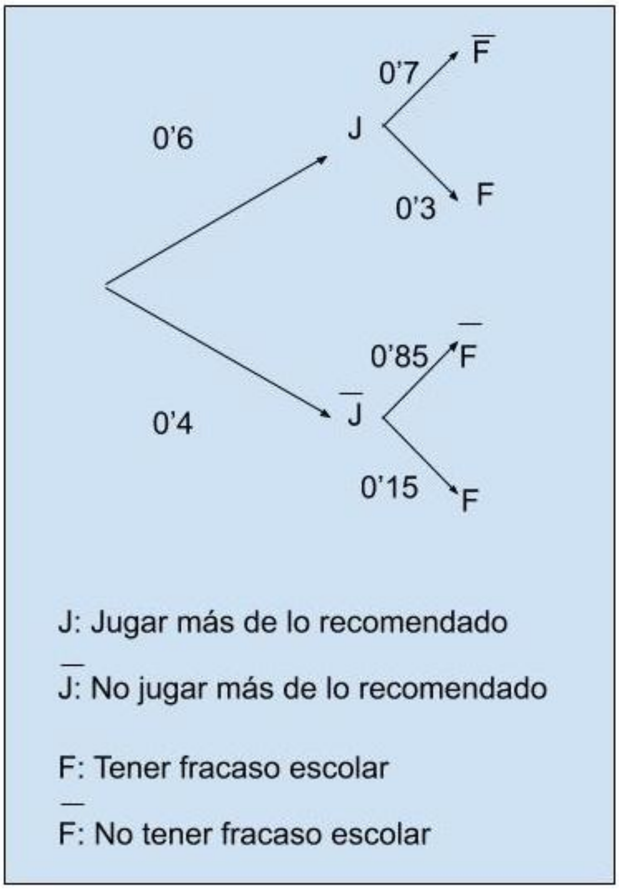
$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 (1 - x^2)dx = 0'63u^2 + 0'66u^2 \cong 1'3u^2$$

El valor del área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$ es de $1'3u^2$.

4. De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0'60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0'30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0'15. Seleccionado un niño al azar de esta región:

a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

Para resolver este apartado, se comenzará elaborando un árbol:



$$P(F) = P(J \cap F) \cup P(J^c \cap F) = 0'6 \times 0'3 + 0'4 \times 0'15 = 0'24$$

La probabilidad de temer fracaso escolar es del 24%.

b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

$$P(J^c/F) = \frac{P(J^c \cap F)}{P(F)} = \frac{P(J^c) \cdot P(F/J^c)}{P(F)} = \frac{0'6 \cdot 0'15}{0'24} = 0'375$$

La probabilidad de que, sabiendo que tiene fracaso escolar, no haya jugado más tiempo del recomendado es de un $37'5\%$.

NOTA: J^c denota el suceso complementario del suceso J.

5. El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1'5$ kilogramos.

a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95%. La amplitud de este intervalo resultó ser 0’49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

En primer lugar, es necesario determinar el error de estimación:

$$E = \frac{Longitud}{2} = \frac{0'49}{2} = 0'245$$

Habiendo obtenido el error, podrá calcularse el tamaño de la muestra mediante la siguiente fórmula:

$$n = \left(\frac{1'96 \times 1'5}{0'245}\right)^2 = 144\, mochilas$$

La muestra fue de 144 mochilas.

NOTA: para obtener $z_{\alpha/2}$ se ha utilizado el siguiente procedimiento:

$$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$$

b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5'75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Este apartado se resuelve mediante la tipificación de la media:

$$P(\bar{x} > 5'75) = P(z > -2'5) = P(z < 2'5) = 0'9938$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt[2]{n}}} = \frac{5'75 - 6}{\frac{1'5}{\sqrt[2]{225}}} = -2`5$$

La probabilidad del que el peso medio muestral supere los 5'75 kilogramos es de un 99'38%.