A.1) Calificación máxima: 2,5 puntos
Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560€ que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C ,que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el valor actual en bolsa de la acción B es 1€, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución

Sea A, B y C el número de acciones de las correspondientes empresas que le tocan a cada hermano. Entonces:

$$\begin{cases} 3(A+B+C)=540 \\ 3\cdot(3A+1\cdot B+6C)=1560 \\ C=\frac{B}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+B+C=180 \\ 3A+B+6C=520 \\ B=2C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+3C=180 \\ 3A+8C=520 \end{cases}$$

$$A=180-3C \quad \Longrightarrow \quad 3(180-3C)+8C=520 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C=540-520=\boxed{20} \\ B=2C=\boxed{40} \\ A=180-3C=180-60=\boxed{120} \end{cases}$$

A.2) Calificación máxima: 2,5 puntos
Calcula el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x)=2+x-x^2 \qquad g(x)=2x^2-4x$$

Solución

Las curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$ se cortan en los puntos cuya coordenada x verifica la ecuación

$$0=g(x)-f(x)=3x^2-5x-2 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6} \Rightarrow x=2,\ x=\frac{-1}{3}.$$

Para $x\in(-1/3,2)$, $g(x)<f(x)$ (ya que, por ejemplo, $g(0)=0<2=f(0)$). Por tanto, el área comprendida por las dos gráficas es

$$\int_{-1/3}^{2}(f(x)-g(x))dx=\int_{-1/3}^{2}(-3x^2+5x+2)dx=-x^3+\frac{5x^2}{2}+2x\Big|_{-1/3}^{2}=-8+10+4-\frac{1}{27}-\frac{5}{18}+\frac{2}{3}=\frac{343}{54}.$$

A.3) Calificación máxima: 2,5 puntos
Sean la recta $r\equiv\begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0\end{cases}$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z+3=0$ Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π
b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano z-y = 0
c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π

Solución

a) La recta r está en forma implícita y su vector director es $\overrightarrow{d_r} = (2,-1,1)$. El vector normal al plano π es $\overrightarrow{\pi} = (2, \mathbf{1}, -1)$ y por tanto el seno del ángulo α que forman es $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{d_r}\cdot\overrightarrow{\pi}|}{|\overrightarrow{d_r}||\overrightarrow{\pi}|} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{3}) \approx 19.47°$.

b) La recta r es $(x,y,z) = (1,-1,0) + \lambda(2,-1,1)$. El punto P de intersección entre la recta y el plano se obtiene para λ solución de $2(1+2\lambda) + (-1-\lambda) - \lambda + 3 = 0$, es decir, $\lambda = -2 \Rightarrow P(-3,1,-2)$. La recta s que pasa por P y es perpendicular al plano $z - y = 0$, tiene por ecuaciones paramétricas $s \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1-\lambda \\ z = -2+\lambda \end{cases}$. La recta s y el plano $z - y = 0$ se cortan en el punto $M(-3, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$, que es el punto medio de PP'. Por tanto $P'(-3,-2,1)$.

c) El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π es: $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y+z+1 = 0$ y por tanto la recta proyección de r sobre π tiene por ecuación $\begin{cases} 2x+y-z+3 = 0 \\ y+z+1 = 0 \end{cases}$

A.4) Calificación máxima: 2,5 puntos

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8,8 meses y una desviación típica de 3 meses

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toma al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo (8.8 – c, 8.8 + c) incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98% de los individuos de esta especie?

Solución

a) T ="tiempo de vida (en meses) de un individuo de esta especie tomado al azar"$\sim$ Normal$(\mu = 8.8, \sigma = 3)$. Con Z la distribución Normal$(0,1)$:

$$P(T > 10) = P(Z > 0.40) \approx 0.3446 \Rightarrow \text{Un } 34.46\ \% \text{ de los individuos.}$$

$$P(7 < T < 10) = P(-0.60 < Z < 0.40) \approx 0.6554 - 0.2743 = 0.3811 \Rightarrow \text{Un } 38.11\ \% \text{ de los individuos.}$$

b) Elegido al azar un individuo de esta especie $p = P(T \leq 10) \approx 0.6554$. Tomados 4 individuos al azar, sus tiempos de vida serán independientes y así la variable X que contabiliza cuántos de estos 4 no han superado los 10 meses de vida es una Binomial$(4, p = 0.6554)$. Se pide

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0.6554)^4 = 1 - 0.3446^4 \approx 0.985898637.$$

c) $P(8.8 - c \leq T \leq 8.8 + c) = 0.98 \Leftrightarrow P\left(0 \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) = 0.49$. De la tabla de la Normal$(0,1)$ se tiene $\frac{c}{3} \approx 2.33$ y así $c \approx 6.99$ es el valor buscado.

B.1) Calificación máxima: 2,5 puntos

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.
b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para a = 1

Solución

a) $|A| = 3a^2 - 29a + 26 \Rightarrow a = 1$ y $a = \dfrac{26}{3}$.
Si $a \neq 1$ o $\frac{26}{3} \Rightarrow$ Sistema compatible determinadod
Si $a = \frac{26}{3} \Rightarrow$ Sistema incompatibled
Si $a = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
b)

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ -y - 6z = 10 \end{array}\right\}$$

Solución: $(-16 - 12t, -10 - 6t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

B.2) Calificación máxima: 2,5 puntos
Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & si\ x < 0 \\ xe^x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudia la continuidad y la derivabilidad de f en x = 0
b) (1 punto) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a (-π,2). Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$
c) (0,75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)\,dx$

Solución

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ así que f es continua en cero. Por lo que se refiere a la derivabilidad,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \text{ (L'Hôpital) y } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1,$$

por tanto, f es derivable en $x = 0$.
b) Para $-\pi < x < 0$, $f'(x) = \cos x$, y se tiene que f es decreciente en $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ y creciente en $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Para $x > 0$, $f'(x) = e^x(x+1) > 0$, así que f es creciente en $(0,2)$, y por ser continua en $x = 0$ lo es en $(-\frac{\pi}{2}, 2)$. Para la segunda parte, basta aplicar el teorema de Bolzano ya que f es continua, $f(0) = 0$ y $f(1) = e > 2$.
c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{sen} x dx + \int_0^1 xe^x dx$. La función $F = -\cos x$ es una primitiva de $\operatorname{sen} x$, mientras que integrando por partes obtenemos que $G(x) = e^x(x-1)$ lo es de xe^x. Por Barrow, la integral pedida es $F(0) - F(-\frac{\pi}{2}) + G(1) - G(0) = 0$.

B.3) Calificación máxima: 2,5 puntos
Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1 \quad y \quad \pi_2 \equiv x + z = 1$
a) (1,5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2
b) (0,5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto (0,2,0) y es perpendicular al plano π_2
c) (0,5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y

Solución

a) Los planos que son paralelos a $x+y=1$ son de la forma $x+y=D$, la distancia del origen a un plano que cumpla la ecuación anterior será $\frac{|D|}{\sqrt{2}}=2$, esto implica que $D=\pm 2\sqrt{2}$. Por tanto los planos son $x+y=2\sqrt{2}$ y $x+y=-2\sqrt{2}$.
b) Una recta perpendicular al plano $x+z=1$ tiene como vector director $\vec{v}=(1,0,1)$ y si corta al eje y en $y=2$ pasa por el punto $(0,2,0)$. Por tanto la ecuación de la recta será $(x,y,z)=(\lambda,2,\lambda)$.
c) Los puntos de intersección con los ejes x e y son los puntos $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ respectivamente. La distancia entre ellos es $\sqrt{2}$.

B.4) Calificación máxima: 2,5 puntos

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. en los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el límite de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos 1 de los dos?

c) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución

a) Sean los sucesos N ="en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y P ="en un día se supera el nivel permitido de partículas". Se sabe que $P(N)=0.16$, $P(P|N)=0.33$ y $P(P|\overline{N})=0.08$. Entonces $P(N\cap P)=P(P|N)\cdot P(N)=0.33\cdot 0.16=0.0528$.
b) $P(P)=P(P|N)P(N)+P(P|\overline{N})\cdot P(\overline{N})=0.0528+0.08\cdot(1-0.16)=0.12$.
$P(P\cup N)=P(P)+P(N)-P(P\cap N)=0.12+0.16-0.0528=0.2272$.
c) P y N no son independientes, ya que $P(P\cap N)=0.0528$ y $P(P)\cdot P(N)=0.12\cdot 0.16=0.0192$ no coinciden.
d) $P(N|\overline{P})=\dfrac{P(N\cap\overline{P})}{P(\overline{P})}=\dfrac{P(N)-P(N\cap P)}{1-P(P)}=\dfrac{0.16-0.0528}{1-0.12}\approx 0.1218$.