Pregunta A.1.- - La sonda Parker de la NASA tiene por objetivo estudiar por primera vez la corona solar. Con ese propósito describe una órbita elíptica alrededor del Sol con un afelio de $1,1 \cdot 10^8 km$ y un perihelio de $7,6 \cdot 10^6 km$. Determine:

a) **El semieje mayor de la elipse y el tiempo que tarda la sonda en dar una vuelta completa al Sol.**

b) **La velocidad de la sonda en el afelio y en el perihelio de la órbita**

Datos: Constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$, Masa del Sol, $M_s = 1,99 \cdot 10^{30} kg$

El afelio y el perihelio suman el eje mayor de la elipse, como se puede apreciar en la imagen.

Por tanto, el eje mayor es $1,1 \cdot 10^8 km + 7,6 \cdot 10^6 km = 1,176 \cdot 10^8 km$, y el semieje mayor es la mitad de eso, $5,88 \cdot 10^7$ km.

La enorme diferencia entre el afelio y el perihelio indica que es una órbita muy elíptica, así que no podremos tratarla como un movimiento circular. Tendremos que recurrir a leyes de Kepler y conservación de la energía.

Por ello, empezamos calculando el periodo con la tercera ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

En el radio ponemos el radio medio entre el perihelio y el afelio, que es $5,9 \cdot 10^7 km = 5,9 \cdot 10^{10} m$, lo que nos da

$$T = 7,8 \cdot 10^6 s.$$

En el apartado b, de nuevo, no podemos usar las ecuaciones de Newton, ya que no es un movimiento circular. En su lugar, tendremos que usar leyes de conservación, como la segunda ley de Kepler (que es la conservación del momento angular) y la conservación de la energía. Así, tenemos dos ecuaciones:

$$v_{afelio} r_{afelio} = v_{perihelio} r_{perihelio} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} m v_{afelio}^2 - \frac{GMm}{r_{afelio}} = \frac{1}{2} m v_{perihelio}^2 - \frac{GMm}{r_{perihelio}} \tag{2}$$

Podemos despejar la velocidad en la primera ecuación y sustituir en la segunda para obtener

$$\frac{1}{2} v_a^2 - \frac{GM}{r_a} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_a^2 r_a}{r_p} \right)^2 - \frac{GM}{r_p}$$

que, despejando, da $v_a = \sqrt{2GM \frac{\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}}{\frac{r_a}{r_p}^2 - 1}} = 1,25 \cdot 10^4 m/s$ Ahora, sustituyendo esto en la conservación del momento angular, tenemos

$$v_p = \frac{r_a}{r_p} v_a = 1,81 \cdot 10^5 m/s.$$

Pregunta A.2.- Un objeto de masa desconocida cuelga de un muelle de constante elástica 750 N/m, de manera que oscila según el eje y describiendo un movimiento armónico simple de frecuencia 3 Hz y energía 1J.

a) **Determine la amplitud del movimiento y el valor de la masa que cuelga del muelle.**

b) **Posteriormente, se coloca una cuerda tensa en el objeto, de modo que por la misma se propagan ondas armónicas transversales con una velocidad de propagación de 5 m/s en el sentido positivo del eje x. Sabiendo que, en el instante inicial y en el origen, el desplazamiento de la masa es nulo y su velocidad es negativa, determine la expresión matemática de la onda en la cuerda.**

La energía de un movimiento armónico simple viene dada por la fórmula $E = \frac{1}{2} k A^2$. Sustituyendo los datos del enunciado, tenemos

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 0,052m = 5,2cm.$$

Por otro lado, la frecuencia angular del movimiento viene dada por $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La frecuencia angular se puede relacionar con la frecuencia mediante $\omega = 2\pi f$, así que, juntando todo, $2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = 2,11 kg$.

La fórmula de una onda es $y(x,t) = Asin(\omega t \pm kx + \phi_0)$. La amplitud la conocemos por el apartado anterior, y la frecuencia angular es $\omega = 2\pi f = 6\pi rad/s$. Además, como la onda se propaga en el sentido positivo, el signo tendrá que ser negativo. Nos queda por determinar la k y la fase inicial.

La k se puede relacionar con la velocidad de propagación y la frecuencia angular mediante $v = \omega/k$, así que $k = \omega/v = 6\pi/5 = 1,2\pi rad/s$. Con esto, la función de la onda es y(x,t)=5,2 sin($6\pi t - 1,2x + \phi_0)cm$.

Para calcular la fase inicial usamos las condiciones iniciales: $y(0,0) = 0, v(0,0) < 0$. La velocidad es $v = \frac{dy}{dt} = 6\pi cos(6\pi t - 1,2x + \phi_0)$, así que son

$$0 = sin(\phi_0); cos(\phi_0) < 0.$$

De la primera sacamos que $\phi_0 = 0$ o π. Como $cos(0) = 1, cos(\pi) = -1$, tiene que ser $\phi_0 = \pi$. Por tanto, la ecuación de la onda es

$$y(x,t) = 5,2sin(6\pi t - 1,2x + \pi)cm.$$

Pregunta A.3.- Dos cargas de 2 nC cada una están fijas en los puntos (0, 0) m y (4, 0) m del plano xy.

a) **Determine el valor de una carga Q si para traerla desde el infinito hasta el punto (2, 2) m el campo hace un trabajo de** $1,27 \cdot 10^7 J$

b) **Indique el punto donde habría que colocar una carga de -10 nC para que la fuerza neta sobre la carga Q fuese cero.**

El trabajo que hace el campo eléctrico para mover una carga desde un punto A hasta otro B es $W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA})$. En nuestro caso, como el punto A está en el infinito, la energía potencial ahí es nula, y tenemos $W_{\infty\to B} = -E_{pB}$.

La energía potencial que tendría esa carga Q en el punto B es $E_p = QV_B$, donde V_B es el potencial eléctrico en ese punto. Es la suma de los potenciales creados por cada una de las dos cargas fijas:

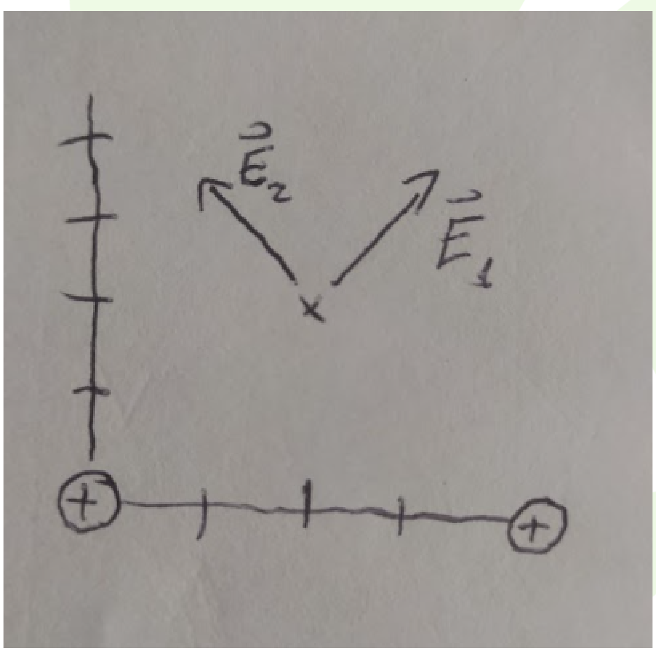
$$V_B = V_1 + V_2 = \frac{Kq_1}{r_1} + \frac{Kq_2}{r_2} = 2\frac{Kq}{r},$$

donde hemos usado que $q_1 = q_2 = q = 2nC, r_1 = r_2 = r = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}m$.

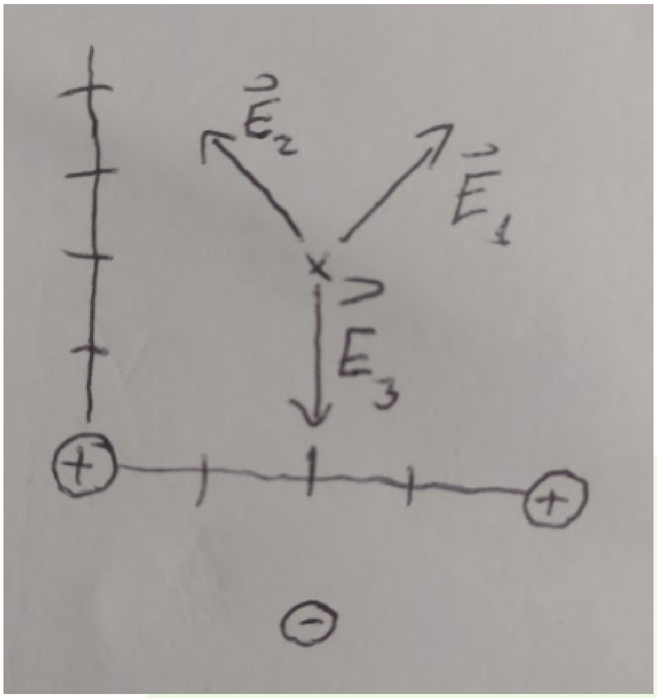
Con esto, el trabajo para mover una carga desde el infinito hasta ese punto B es

$$W = -QV_B = -\frac{2KQq}{r} \to Q = -\frac{Wr}{2Kq} = -10nC.$$

Para que la fuerza que actúa sobre la carga Q sea 0 basta con que el campo eléctrico en el punto B sea 0, y para eso necesitaremos que el campo de la nueva carga anule a los campos de las dos cargas dadas. Como muestra el diagrama, el campo producido por las dos masas dadas irá hacia arriba.



Si queremos que el campo total sea nulo, necesitamos que la tercera carga produzca un campo hacia abajo. Como es negativa, necesitaremos ponerla debajo:



Para que el campo pueda cancelar a los otros dos necesitamos que su módulo sea igual al módulo de la suma de los otros dos. Tenemos:

$$|E_1 + E_2| = 2E_1 sin(45) = \frac{2Kq}{r^2}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por otro lado, el módulo del campo producido por la tercera carga es

$$|E_3| = \frac{Kq_3}{R^2},$$

donde R es la distancia hasta el punto B. Igualando ambas,

$$\frac{Kq_3}{R^2} = \frac{2Kq}{r^2\sqrt{2}} \rightarrow R = \sqrt{\frac{q_3\sqrt{2}}{2q}}r = 5,32m.$$

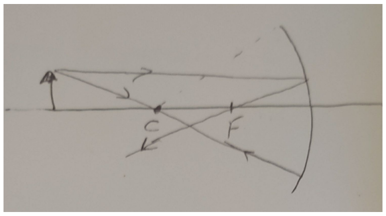
Por tanto, la tercera carga tiene que estar debajo del punto B(2,2) y a una distancia de 5,32m, asi que tiene que estar en (2,-3,32).

Pregunta A.4.- Un espejo esférico cóncavo de 60 cm de radio de curvatura tiene situado a 80 cm frente a él y sobre su eje óptico un objeto de 5 cm de altura

a) **Describa y dibuje las trayectorias de los rayos que salen hacia el espejo desde el extremo superior del objeto, en el caso de que el rayo salga paralelo al eje óptico y en el caso de que el rayo pase por el centro de curvatura del espejo**

b) **Calcule la posición y el tamaño de la imagen del objeto producida por el espejo.**

a. El rayo de luz paralelo al eje óptico llegará hasta el espejo, desde donde rebotará hacia el foco. El rayo que pasa por el centro de curvatura se reflejará y volverá por el mismo camino, como se muestra en la imagen:



b. Tenemos un radio de curvatura de 60cm, por lo que la distancia focal es $f = R/2 = -30cm$, donde el signo - es porque el foco está a la izquierda. El objeto está en $s = 80cm$. Con esto, podemos averiguar la posición de la imagen con:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{-30} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{-80cm} \rightarrow s' = -48cm.$$

El tamaño de la imagen es

$$y' = -\frac{s'}{s}y = -\frac{-48}{-80}5cm = 3cm.$$

Pregunta A.5.- El isótopo 198 del oro (198Au) reduce su actividad a la sexta parte en el transcurso de una semana.

a) Determine la constante de desintegración y el período de semidesintegración del 198Au.

b) Una muestra de 198Au presenta al cabo de un día una actividad de 10 kBq. Calcule la actividad y el número de núcleos iniciales.

La actividad de una muestra radiactiva evoluciona según la ecuación $A(t) = A_0e^{-\lambda t}$, donde A_0 es la actividad inicial y λ es la constante de desintegración. Nos dicen que cuando $t = 7$días la actividad es un sexto de la actividad inicial, es decir, $A(7) = A_0/6$. Sustituyendo tenemos

$$\frac{A_0}{6} = A_0e^{-\lambda 7} \rightarrow \frac{1}{6} = e^{-\lambda 7} \rightarrow \ln(1/6) = -\lambda 7 \rightarrow \lambda = ln(6)/7 = 0,26dias^{-1}.$$

El periodo de semidesintegración es

$$T_{1/2} = \frac{ln(2)}{\lambda} = 2,67dias.$$

Es un valor razonable: nos dice el tiempo que tarda en reducirse una muestra a la mitad. Según eso, tardará 2,67 días en reducirse a la mitad, 5,34 en reducirse a un cuarto, y 8,01 días en reducirse a un octavo, y el enunciado nos dice que tarda siete en reducirse a un sexto.

Para calcular la actividad inicial basta con sustituir los datos en la ecuación de la actividad:

$$10kBq = A_0e^{-0,26\frac{1}{dias}1dia = A_0e^{-0,26} = A_0 0,77 \rightarrow A_0 = 10kBq/0,77 = 13kBq.}$$

Para hallar el número de núcleos iniciales usamos la fórmula

$$A_0 = \lambda N_0$$

Tenemos que tener cuidado con las unidades: el lado izquierdo se mide en Bqs, que son núcleos por segundo, así que tenemos que cambiar las unidades del lado derecho:

$$\lambda = 0,26\frac{1}{dias}\frac{1dias}{24horas}\frac{1horas}{3600s} = 3 \cdot 10^{-6}s^{-1}.$$

Con esto,

$$N_0 = \frac{A_0}{\lambda} = 4,3 \cdot 10^9 nucleos.$$

Pregunta B.1.- Un astronauta en misión de exploración aterriza sobre un planeta esférico de radio 1800 km. Cuando se encuentra en su superficie deja caer un objeto desde una altura de 2 m y observa que éste tarda 1,5 s en llegar al suelo.

a) **Determine el valor de la gravedad en la superficie del planeta y la masa de éste**

b) **El astronauta despega en su cohete con una velocidad de 3 km s−1 . Compruebe si el astronauta escapará del planeta, y en caso afirmativo, calcule la velocidad que tendrá cuando se encuentre muy alejado de éste**

Datos: Constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$

Para calcular la gravedad podemos estudiar la caída del objeto. Como la altura de la caída es baja, lo podemos tratar como un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado con aceleración g. Tenemos entonces

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 2 = 0 + \frac{1}{2}g1,5^2 \rightarrow g = 1,78m/s^2.$$

Conociendo el campo gravitatorio y el radio del planeta podemos calcular su masa:

$$g = \frac{GM}{r^2} \rightarrow M = \frac{gr^2}{G} = \frac{1,78 \cdot (1800 \cdot 10^3)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 8,6 \cdot 10^{22} kg$$

Para ver si el cohete escapa del planeta calculamos su energía mecánica: si es positiva o nula, escapa, si es negativa, no.

La energía mecánica es

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = m\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r}\right) = m\left(\frac{1}{2}3000^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} 8,6 \cdot 10^{22}}{1800 \cdot 10^3}\right) = 1,3 \cdot 10^6 mJ.$$

Como la masa es positiva, la energía es positiva, así que sabemos que va a escapar del campo gravitatorio.

Cuando el cohete esté muy alejado del planeta la distancia será muy grande, así que la energía potencial será nula. En términos rigurosos, decimos que $\lim_{r\to\infty} -\frac{GMm}{r} = 0$. Por tanto, toda la energía mecánica que tendrá el cuerpo será energía cinética.

Tenemos entonces que

$$E_c = 1,3 \cdot 10^6 m \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 1,3 \cdot 10^6 m \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 1,3 \cdot 10^6} = 1,6 \cdot 10^3 m/s.$$

En el proceso hemos cancelado la masa del cohete.

Pregunta B.2.- Un foco sonoro puntual F1 emite ondas sonoras esféricas, de manera que el nivel de intensidad percibido por un observador a 3 m es de 60 dB.

a) **Determine la intensidad de la onda a la distancia de 3 m y la potencia del foco.**

b) **Ahora un segundo foco F2, que emite con potencia doble que el foco F1, emite ondas de manera simultánea con F1, de manera que el nivel de intensidad percibido por el observador es de 70 dB. Halle la distancia a la que se encuentra el foco F2 del observador.**

Dato: Valor umbral de la intensidad acústica, $i_0 = 10^{-12} W/m^2$

El nivel de intensidad sonora y la intensidad se relacionan a través de la fórmula

$$\beta = 10log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow I = I_0 10^{\beta/10}.$$

En nuestro caso, $\beta = 60dB$, así que la intensidad es

$$I = 10^{-12}10^6 = 10^{-6} W/m^2.$$

La intensidad sonora, a su vez, se relaciona con la potencia del foco y la distancia mediante

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2},$$

por lo que

$$P = 4\pi r^2 I = 113 \cdot 10^{-6} = 1,13 \cdot 10^{-4} W.$$

Cuando añadimos un segundo foco, el nivel de intensidad sonora pasa a ser 70dB, así que la intensidad del sonido es

$$I = I_0 10^{70/10} = 10^{-5} W/m^2.$$

Como la intensidad del primero era 10^{-6}, la intensidad de este segundo tiene que ser $9 \cdot 10^6$.

Como la potencia del primer foco es $1,33 \cdot 10^{-4} W$ y la del segundo es el doble, será $2,66 \cdot 10^{-4} W$. A partir de aquí podemos sacar la distancia:

$$I_2 = \frac{P_2}{4\pi r^2} \rightarrow r = \sqrt{2} m$$

Pregunta B.3.- Por un solenoide infinitamente largo de 250 espiras por metro, cuyo eje coincide con el eje z, circula una corriente eléctrica variable en el tiempo según se muestra en la figura

a) **Determine el campo magnético en su interior para t = 3 s y t = 8 s**

b) **Si en el interior del solenoide hay una espira cuadrada de lado a = 3 cm y resistencia eléctrica de 5 Ω, cuya superficie es perpendicular al eje z, calcule la intensidad de corriente inducida en la espira en t = 3 s y en t = 8 s**

Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} TmA^{-1}$

El campo magnético en el interior de un solenoide es $B = \mu_0 I n$, donde $n = N/L$ es la densidad de espiras. En nuestro caso, en $t = 3s$ la intensidad es 6A, y en $t = 8s$, $I = 10A$. Sustituyendo,

$$B(t = 3s) = 4\pi 10^{-7} 6 \cdot 250 = 1,88 \cdot 10^{-3} T; B(t = 8s) = 4\pi 10^{-7} 10 \cdot 250 = \pi \cdot 10^{-3} T.$$

En ambos casos el campo va en la dirección del solenoide, es decir, en la dirección del eje z.

Para hallar la corriente producida recordamos que cuando el flujo magnético ϕ varía de forma uniforme aparece una fuerza electromotriz $\epsilon = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$, que produce una intensidad de corriente dada por la ley de Ohm: $I = \epsilon/R$.

En el instante $t = 8$ la corriente no varía. En consecuencia, el campo magnético tampoco y el flujo permanece constante. No aparece fuerza electromotriz y tampoco corriente.

En el instante $t = 3s$, el flujo es

$$\phi = BS = Ba^2 = \mu_0 I n a^2$$

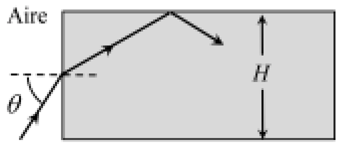
Su ritmo de cambio es

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \mu_0 \frac{\Delta I}{\Delta t} n a^2 = 4\pi 10^{-7} 2 \cdot 250 \cdot 0,03^2 = \frac{1}{R} \mu_0 \frac{\Delta I}{\Delta t} n a^2 = 1,1 \cdot 10^{-7} A.$$

donde hemos usado $\Delta I/\Delta t = 10/5$, porque entre 0 y 5s varía de 0 a 10A. Con esto, la intensidad de corriente es

$$I = \frac{1}{R} \mu_0 \frac{\Delta I}{\Delta t} n a^2 = 1,1 \cdot 10^{-7} A.$$

Pregunta B.4.- Un rayo de luz incide desde el aire sobre la superficie lateral de un paralelepípedo a mitad de altura (ver figura). La altura del paralelepípedo es H = 4 cm y su índice de refracción vale 1,34.



a) **Si el rayo incide con un ángulo de incidencia de 60◦ , obtenga el tiempo que tarda el rayo en el interior del paralelepípedo desde que penetra en él hasta que alcanza su cara superior**

b) **¿Qué condición debe cumplir el ángulo de incidencia θ para que se produzca reflexión total en la frontera definida por la cara superior del paralelepípedo y el aire?**

Datos: Índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$**, Velocidad de la luz en el vacío,** $c = 3 \cdot 10^8$

Para alcanzar la cara superior desde la mitad de la altura el rayo de luz tiene que recorrer una distancia $H/2 = 2cm$. El tiempo que tardará en recorrer esa altura moviéndose a una velocidad v es $\Delta t = H/2v_y$, donde $v_y = vsin(\alpha)$ es la proyección vertical de la velocidad.

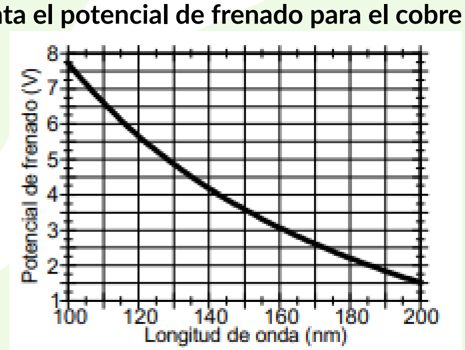
Empezamos hallando α. Por la ley de Snell, tenemos $1\sin(60) = n_2 sin(\alpha) \to \alpha = arcsin(\sin(60)/1,34) = 40,26$. Por otro lado, la velocidad de la luz en el material es $v = \frac{c}{n_2} = 2,23 \cdot 10^8 m/s$. Juntando todo, el tiempo que tarda la luz en llegar a la cara superior es

$$\Delta t = \frac{Hn_2}{2csin(\alpha)} = 1,4 \cdot 10^{-10} s.$$

Para que se produzca reflexión total en la cara superior es necesario que el ángulo de incidencia sea mayor que el ángulo crítico, $\alpha_{crit} = arcsin(1/n_2) = 48,3$.

Por trigonometría, esto requiere que el ángulo de refracción α en la cara incidente sea $\alpha = 90 - \alpha_{crit} = 41,7$. Según la ley de Snell, tendremos ese ángulo de refracción cuando el ángulo incidente sea $\theta = arcsin(1,34 sin(41,7) = 63,1$.

Pregunta B.5. - En la gráfica adjunta se representa el potencial de frenado para el cobre cuando se ilumina con



fotones de longitudes de onda entre 100 y 200 nm.

a) **Utilice los datos de la gráfica para determinar el valor de la constante de Planck y el trabajo de extracción para el cobre.**

b) **Considere un electrón emitido con energía cinética máxima por el cobre cuando es irradiado con luz de longitud de onda de 100 nm. ¿Qué incremento de energía cinética experimentaría si tras ser emitido fuese acelerado hasta una velocidad igual a 0,8 c?**

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$**, Valor absoluto de la carga del electrón,** $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$**, Masa en reposo del electrón,** $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg$

El potencial de frenado es el potencial necesario para frenar a los electrones emitidos por el efecto fotoeléctrico. Estos tendrán una energía cinética dada por $E_c = E_\gamma - W_0 = \frac{hc}{\lambda} - W_0$, donde E_γ es la energía de los fotones incidentes y W_0 es el trabajo de extracción del material. Para frenar estos electrones necesitamos un potencial $V = \frac{E_c}{e}$, por lo que

$$V = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{W_0}{e}.$$

Conocemos los valores de e, c, y tenemos una gráfica con valores de V y λ. Podemos usar la gráfica para hacer un sistema de dos ecuaciones para las dos incógnitas h y W_0. Por ejemplo, si usamos $\lambda = 100nm, 200nm$, que son los dos extremos del gráfico, tenemos

$$7,75 = h\frac{3 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^{-9} 1,6 \cdot 10^{-31}} - \frac{W_0}{1,6 \cdot 10^{-31}} \tag{3}$$

$$1,5 = h\frac{3 \cdot 10^8}{200 \cdot 10^{-9} 1,6 \cdot 10^{-31}} - \frac{W_0}{1,6 \cdot 10^{-31}}. \tag{4}$$

Resolviendo este sistema tenemos $h = 6,67 \cdot 10^{-34} Js$ y $W_0 = 7,6 \cdot 10^{-19} J = 4,75 eV$.

b. El electrón es emitido con una energía cinética $E_c = qV_{frenado} = 1,24 \cdot 10^{-18} J$. Un electrón moviéndose a 0,8c tiene una energía cinética $E_c = (\gamma - 1)mc^2 = (\frac{1}{\sqrt{1-0,8^2}} - 1)m_e c^2 = 5,5 \cdot 10^{-14} J$. El incremento durante la aceleración sería $\Delta E_c = 5,5 \cdot 10^{-14} J - 1,24 \cdot 10^{-18} J = 5,5 \cdot 10^{-14} J$.