FÓRMULAS GEOMETRÍA

- ÁNGULOS
  - Entre dos rectas (que se cortan o cruzan): es el ángulo que forman sus vectores directores

$$\cos(r,s) = \cos(\vec{u_r},\vec{u_s}) = \frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}|}{|\vec{u_r}|\cdot|\vec{u_s}|}$$

1. Hallar el ángulo que forma la recta $r: x = y = z$ con la recta $s: \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Sol.: 90°

2. Calcular el ángulo que forman las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{1} \; y \; s: \frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

Sol.: 60°

  - Entre dos planos: es el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\cos(\pi_1,\pi_2) = \cos(\vec{n_1},\vec{n_2}) = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$$

3. Hallar el ángulo que forman los planos

$$\pi_1: x + 2y - z = 3 \; y \; \pi_2: 2x - y + 3z = 0$$

Sol.: 71°

4. Dados los planos $\alpha: 3x - 2y + 5z - 2 = 0$ y $\beta: kx + 7y + z = 0$, hallar el valor de k para que sean perpendiculares.

Sol.: $k = 3$

  - Entre plano y recta: es igual al ángulo que forma la recta r con la recta r', que es la proyección de la recta r sobre el plano π.

$$sen(r,\pi) = |\cos(\vec{u_r},\vec{n_\pi})| = \frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{n_\pi}|}{|\vec{u_r}|\cdot|\vec{n_\pi}|}$$

5. Hallar el ángulo formado por el plano $\alpha: x + 2y - z - 3 = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$

Sol.: 30°

6. Hallar el ángulo formado por el plano $\alpha: 2x + 3z = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 9y + 8 = 0 \end{cases}$

Sol.: 8°

- DISTANCIAS
  - Entre dos puntos: es el módulo del vector que los une.

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$$

7. Hallar la distancia entre los puntos $A(1,2,1)$ y $B(5,2,7)$.

Sol.: $\sqrt{52}$

8. La distancia del punto $P(1,2,3)$ a otro A del eje de abscisas es 7. Hallar las coordenadas del punto A.

Sol.: $A(7,0,0)$ y $B(-5,0,0)$

  - Entre punto y plano. Planos paralelos.

Si $P(x_0, y_0, z_0)$ punto y $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{|\vec{n}|}$$

- La distancia entre **planos paralelos** es igual a la distancia de un punto cualquier de un plano al otro plano.

9. Hallar la distancia del punto $A(1,2,5)$ al plano $\alpha: 2x + 2y - z - 5 = 0$.

Sol.: $4/3$

10. Hallar la distancia del plano $\alpha: 2x + y - z - 3 = 0$ al plano $\beta: 4x + 2y - 2z - 7 = 0$.

Sol.: $\sqrt{24}/24$

  - Entre punto y recta. Rectas paralelas

$$d(P,r) = |\overrightarrow{QP}| = \frac{|\overrightarrow{A_rP} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}$$

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento PQ, donde Q es la proyección ortogonal de P ||sobre la recta.

- La distancia entre **rectas paralelas** es igual a la distancia de un punto cualquier de una a la otra recta.

11. Hallar la distancia del punto $P(3,4,5)$ a la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+5}{-1}$

Sol.: $\sqrt{146}$

12. Calcular la distancia del punto $P(1,3,-1)$ a la recta $r:\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

Sol.: $\sqrt{62/6}$

- <u>Entre rectas que se cruzan</u>

$$d(r,s)=\frac{|\det(\overrightarrow{A_rA_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s})|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}$$

13. Hallar la distancia entre las rectas $r: \frac{x+3}{3}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$

Sol.: 3

- VOLÚMENES
  - <u>Paralelepípedo</u>

Consideramos el paralelepípedo cuyas aristas en el vértice A determinan los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

$$V=|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$$

  - <u>Tetraedro</u>

$$V=\frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$$

14. Escribir la ecuación del plano determinado por los puntos $A(0,2,-2), B(3,2,1) y\ C(2,3,2)$ y calcular el volumen del tetraedro que limita con los planos cartesianos.

Sol.: $x+2y-z-6=0$
$V=18$

15. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,3)$, sabiendo que el triángulo formado por las rectas en que corta a los planos cartesianos es equilátero. Calcular el volumen determinado por dicho plano y los planos cartesianos.

Sol.: $x+y+z-6=0$
$V=36$