PROBABILIDAD. Variables aleatorias

1. CONCEPTOS PREVIOS

- **Variable aleatoria (X):** Es una función que hace corresponder un número real a cada uno de los sucesos del espacio muestral. La variable aleatoria toma valores en función de los resultados de una experiencia aleatoria.

  En función de los valores que tome la variable, ésta se puede clasificar en:

  - Discreta: Sólo puede tomar valores numerables (valores exactos).
  - Continua: Sólo puede tomar valores no numerables (valores en intervalos).

- **Recorrido de la variable aleatoria:** Conjunto de todos los valores que puede tomar una variable aleatoria.

- **Función de probabilidad:** Probabilidad de una variable aleatoria discreta tome un valor determinado.

$$P(X = x_i) = \sum P(x_i)$$

- **Función de densidad:** Probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor determinado.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

- **Función de distribución:** Función acumulativa de probabilidad de la variable.

  - V. A. Discreta: $F(x) = \sum f(x_i)$
  - V. A. Continua: $P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

2. PARÁMETROS FUNDAMENTALES DE UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

- **Promedio de los valores de las probabilidades de las V. A.:**

  - Valor esperado, media o esperanza matemática (μ):

$$\mu = E(x) = \sum x_i \cdot p(x_i)$$

- **Dispersión de los valores de las V. A. respecto del promedio (media):**

  - Varianza (V):

$$V(x) = \sum p(x_i) \cdot (x_i - \mu)^2$$

  - Desviación típica (σ):

$$\sigma = \sqrt{\sum p(x_i) \cdot (x_i - \mu)^2}$$

3. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable la probabilidad de que dicho suceso ocurra.

La distribución de probabilidad está completamente especificada por la función de distribución, cuyo valor en cada 'x' real es la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que 'x'.

3.1. Distribuciones de V. A. Discretas

- **Distribución binomial (X~B (n, p)):**

  Cuenta el número de éxitos y fracasos de un experimento se repite 'n' veces. La probabilidad de éxito es 'p' y la de fracaso es 'q'.

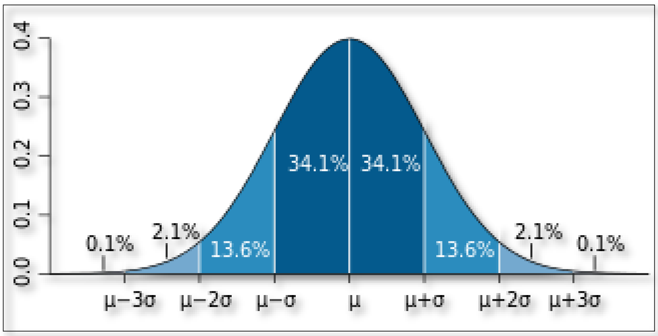
$$q = 1 - p$$

  - <u>Función de probabilidad</u>: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
  - <u>Parámetros</u>:
    - Media: $\mu = E(x) = n \cdot p$
    - Varianza: $V(x) = n \cdot p \cdot q$
    - Desviación típica: : $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

3.2. Distribuciones de V. A. Continuas

- **Distribución normal (X~N (μ, σ)):**

Representa como se distribuyen los datos en torno a un parámetro de referencia (media). Estos datos se distribuyen en forma de campana (campa de Gauss).



Algunas propiedades de la distribución normal son:

- Es simétrica respecto de su media.
- La moda y la mediana son ambas iguales a la media.
- Los puntos de inflexión de la curva se dan para: $x = \mu - \sigma;\ x = \mu + \sigma$

Nota: Normalmente, a modo se simplificación, se intenta transformar la distribución normal N (μ, σ) en una distribución más sencilla llamada distribución normal o estándar N (0, 1).

<u>Tipificación de la variable:</u>

Para calcular las probabilidades de una variable 'x' que sigue una distribución normal N (μ, σ), y poder usar las tablas de distribución estándar N (0, 1), es necesario hacer un cambio de variable para adaptar dicha variable 'x'.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

3.3. Aproximación de una distribución binomial a una distribución normal

Una variable aleatoria discreta con distribución binomial, se puede aproximar mediante una distribución normal si 'n' es suficientemente grande y 'p' no está ni muy próximo a 0 ni a 1. Como el valor esperado (media) y la varianza de 'X' son respectivamente np y npq , la aproximación consiste en decir que: X~N $(np, \sqrt{npq})$.
El convenio que se suele utilizar para poder realizar esta aproximación es:

$$X \sim B(n,p) \rightarrow \begin{cases} n > 30 \\ np \text{ ó } nq > 4 \end{cases}$$