OPCIÓN A

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

a) Determine $\boldsymbol{A^3}$ y $\boldsymbol{A^{2023}}$

b) Estudie si la matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible y en caso afirmativo, calcule su inversa.

Resolución:

a) Cálculo de la potencia A^3:

$$A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Cálculo de la potencia A^{2023}:

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A^{2023} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix}$$

Conclusión:

La matriz A^3 es $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; y, la matriz A^{2023}, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix}$

b) Comprobación de si la matriz es invertible:

Para que una matriz sea invertible, su determinante debe ser no nulo, por tanto:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Como el determinante es diferente de 0, puede calculare su inversa:

Cálculo de la inversa de la matriz A:

i) Se calcula la matriz adjunta: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

ii) Se transpone la matriz adjunta: $\left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

iii) Se reemplaza en la fórmula general de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusión:

La matriz inversa de la matriz A será $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 2x^2}$$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
b) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

Resolución:

a) Para obtener la ecuación de la recta tangente, se buscan los valores x_0, y_0 y m; para luego reemplazarlos en la ecuación general de la recta tipo $y - y_0 = m(x - x_0)$:

Para $x = 1$, se cumple que $x_0 = 1$. Por tanto, los valores de y_0 y m serán:

- Valor de y_0:

$$y_0 = f(x_0) = f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 = 3 \rightarrow y_0 = 3$$

- Valor de m:

$$\left.\begin{aligned} m &= f'(x_0) \\ f'(x) &= 3x^2 + 4x \\ x_0 &= 1 \end{aligned}\right\} m = f'(1) = 3(1)^2 + 4(1) \rightarrow m = 7$$

- Reemplazo en la ecuación general:

$$y - 3 = 7(x - 1) \rightarrow y = 7x - 4$$

Conclusión:

La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 1$ será $y = 7x - 4$

b) Cálculo de los extremos relativos:

Para averiguar los extremos relativos de la función se necesitan los puntos críticos de la misma. Para obtenerlos, se calculará la primera derivada de la función, se la igualará a 0 y despejar (si es posible) la variable x. Seguidamente, se calcula la segunda derivada de $f(x)$, y se reemplazan los puntos críticos. Si el resultado de f'' es positivo, indicará que se trata de un mínimo; y, si es negativo, de un máximo. Aplicado a este ejercicio:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \to x(3x+4) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 4 = 0 \to x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x + 4 \to \begin{cases} f''(0) = 6(0) + 4 = 4 > 0 \to Mínimo\ en\ x = 0 \\ f''\left(-\dfrac{4}{3}\right) = 6\left(-\dfrac{4}{3}\right) + 4 = -4 < 0 \to Máximo\ en\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Conclusión:

La función $f(x) = x^3 + 2x^2$ presenta un mínimo en el punto $x = 0$, y un máximo en el punto $x = -\frac{4}{3}$.

A.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3\ si\ x < 2 \\ e^x\ si\ x \geq 2 \end{cases}}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Resolución:

a) Cálculo del parámetro a para que la función sea continua en su dominio:

Para que la función sea continua, debe verificarse la definición de continuidad. Para el caso de $x = 2$, será:

$$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \to e^2 = 4a + 3 = e^2 \to a = \frac{e^2 - 3}{4} \cong 1'09$$

Conclusión:

El valor de a para que la función sea continua en su dominio deberá ser $a = \frac{e^2-3}{4} \cong 1'09$.

i) Cálculo del recinto acotado entre $f(x)$, el eje de abscisas, la recta $x = 2$, y la recta $x = 3$:

Primeramente, se buscan los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje x. Seguidamente, contando con los puntos de corte, y dado que se indica que la integral deberá estar en el rango $[2;3]$, se comprueban si los puntos de corte de la función caen dentro del rango. En caso afirmativo, se dividirá a la función en tanto trozos como sea necesario, poniendo cada uno de ellos en valor absoluto; y, seguidamente, se resuelve la integral definida entre esos puntos, aplicando la Regla de Barrow:

$$f(x) = e^x \neq 0 \to \left|\int_2^3 (e^x)dx\right| = \left|[e^x]_2^3\right| = |(e^3) - (e^2)| \cong |12'69| \cong 12'69\, u^2$$

Conclusión:

El valor del recinto acotado entre $f(x)$, el eje de abscisas, la recta $x = 2$, y la recta $x = 3$ es de 12'69 u².

A.4. (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4% de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65,1% consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3% de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

a) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

b) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Resolución:

Antes de comenzar con el ejercicio, es necesario definir las probabilidades de los siguientes sucesos:

- Suceso A: hace alguna actividad física al menos 150 minutos: $P(A) = 0'274$
- Suceso B: consume de 1 a 4 porciones: $P(B) = 0'651$
- Hace alguna actividad física al menos 150 minutos o consume de 1 a 4 porciones: $P(A \cup B) = 0'763$

Sobre esto, puede resolverse el ejercicio

a) Cálculo de que dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \rightarrow P(A \cap B) = 0'274 + 0'651 - 0'763 = 0'162$$

Conclusión:

La probabilidad de que dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día es de un 16'2%.

b) Cálculo de la probabilidad de que no dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día:

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0'763}{1 - 0'651} = \frac{0'237}{0'349} = 0'679$$

Conclusión:

La probabilidad de que no dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día 67'9%.

A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0'55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01%, el margen de error en la estimación no supere el 10%.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

Resolución:

a) Cálculo del tamaño de la muestra:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2 \cdot \sigma} \cdot \sqrt{\hat{p} \cdot \hat{q}}}{E}\right)^2 \rightarrow n = \left(\frac{2{,}575^{*} \cdot 0'55 \cdot 0'45^{**}}{0'1}\right)^2 \cong 164'1 = 165$$

NOTA:

* Cálculo de $z_{\alpha/2}$: $1 - \frac{1-\alpha}{2} = 1 - \frac{1-0{,}9901}{2} = 0'99505 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}575$

** Cálculo de $\hat{q}$: $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0'55 = 0'45$

Conclusión:

El tamaño mínimo de la muestra será de 165 empresas.

b) Cálculo del intervalo de confianza:

$$IC(\hat{p})_{0,95} = \left(0'7^{*} \pm 1'96^{**} \cdot \sqrt{\frac{0'7 \cdot 0'3^{***}}{100}}\right) = (0'7 \pm 0'0898) = (0'6102; 0'7898)$$

NOTA:

*Cálculo de $\hat{p}$: $\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{70}{100} = 0'7$

**Cálculo de $z_{\alpha/2}$: $1 - \frac{1-\alpha}{2} = 1 - \frac{1-0{,}95}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

*** Cálculo de $\hat{q}$: $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0'7 = 0'3$

Conclusión:

La probabilidad de que, en una muestra de 100 empresas, 70 tuvieran pérdidas estará comprendido entre un 61'02% y un 78'89%, con una confianza del 95%.

OPCIÓN B

B.1. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valore del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Resolución:

Antes de comenzar a resolver el ejercicio, es necesario transcribir las ecuaciones a matriz:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases} \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right)$$

a) <u>Discusión del sistema</u>
Para discutir el sistema, se hará el siguiente procedimiento:
i) Se calcula el determinante de la matriz A, se iguala a cero, y se despeja el parámetro a:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 - 7a + 6 = 0 \rightarrow$$

	1	0	-7	6	
1		1	1	-6	$\rightarrow a = 1$
	1	1	-6	0	
-3		-3	6		$\rightarrow a = -3$
	1	-2	0		
2		2			$\rightarrow a = 2$
	1	0			

ii) Se discuten los posibles tipos de sistema, mediante casos:
<u>Caso 1:</u> $a \neq -3$, $a \neq 1$ y $a \neq 2$

$$\begin{matrix} |A| \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3 \\ |A^*| \neq 0 \rightarrow Rg(A^*) = 3 \end{matrix} \rightarrow Rg(A) = Rg(A^*) = Nº\ incógnitas \rightarrow SCD$$

<u>Caso 2</u>: $a = -3 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \rightarrow Rg(A) < 3 \rightarrow |M_{2x2}| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \rightarrow Rg(A^*) = 3$$

$$Rg(A) \neq Rg(A^*)$$

$$SI$$

<u>Caso 3</u>: $a = 1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$|A| = 0 \rightarrow Rg(A) < 3 \rightarrow |M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rg(A^*) < 3 \rightarrow |M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow Rg(A^*) = 2$$

$$Rg(A) = Rg(A^*) < Nº\ inc$$

$$SCI$$

Caso 4: $a = 2 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \rightarrow Rg(A) < 3 \rightarrow |M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 2$

$|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \rightarrow Rg(A^*) = 3$

$Rg(A) \neq Rg(A^*)$

SI

Conclusión:

- Si $a \neq -3$, $a \neq 1$ y $a \neq 2$, el sistema tiene una única solución.
- Si $a = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $a = -3$ y $a = 2$, el sistema no tiene solución.

b) Resolución del sistema para $a = 0$:

i) En primer lugar, se reemplaza el valor de a en la matriz ampliada; y, seguidamente, se obtiene el valor del determinante de la matriz A:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow |A| = 6$$

ii) A continuación, se resuelven los determinantes de las matrices A_x, A_y, y A_z; y, seguidamente, se dividen por el determinante de la matriz A:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{1}{6}$$

Conclusión:

La solución será $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$

B.2. (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Resolución:

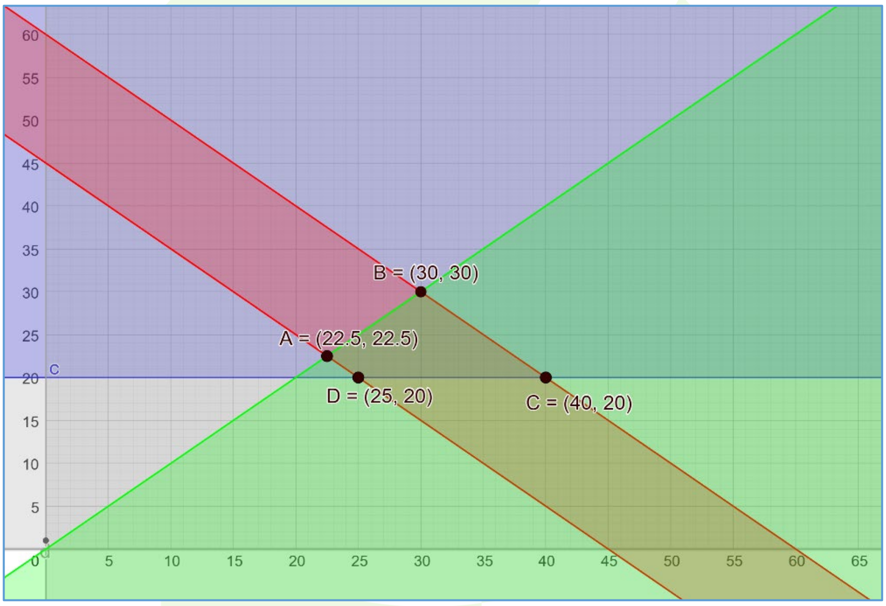
Para resolver el ejercicio, es necesario definir, primeramente, las variables del problema:

- x: Ejercicios cardiovasculares
- y: Ejercicios de fuerza

En base a esto, se definen la función objetivo, y las restricciones del problema:

- Función objetivo: $Max\ B(x,y) = 2x + y$
- Restricciones:
  - Entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares: $45 \leq x + y \leq 60$
  - El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares: $y \leq x$
  - El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos 1: $y \geq 20$
  - Cantidad mínima de ejercicios cardiovasculares: $x \geq 0$
  - Cantidad mínima de ejercicios de fuerza: $y \geq 0$

Sobre esto, la región factible que se obtiene será:



Seguidamente, se reemplaza cada coordenada en la función objetivo:

$$f_A(22'5; 22'5) = 2 \cdot 22'5 + 22'5 = 67'5$$
$$f_B(30; 30) = 2 \cdot 30 + 30 = 90$$
$$f_C(40; 20) = 2 \cdot 40 + 20 = 100$$
$$f_D(25; 20) = 2 \cdot 25 + 20 = 70$$

Conclusión:

Para maximizar el beneficio, se deberán dedicar 40 minutos a ejercicios cardiovasculares, y 20 minutos a ejercicios de fuerza, obteniéndose un beneficio de 100. La runa menos beneficiosa será destinar 22 minutos y medio tanto a ejercicios de fuerza, como cardiovasculares, ya que el beneficio que se obtendrá es de 67'5.

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$\boldsymbol{f(x) = x + \frac{2}{x}}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Resolución:

a) Estudio del dominio y las asíntotas de la función:

Para estudiar el dominio de la función, lo más conveniente es, en primer lugar, convertir toda l función a una única fracción:

$$f(x) = x + \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 2}{x}$$

Sobre esto, dado que se trata de un cociente, para estudiar el dominio de la función, se igualará a cero el denominador:

$$x = 0 \rightarrow Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

En cuanto a las asíntotas de la función, haremos el siguiente desarrollo:

Asíntotas Verticales	Asíntotas Horizontales	Asíntotas Oblicuas
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$	$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2+2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = 1$ $n = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+2}{x} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$

Conclusión:

La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, no tiene asíntotas horizontales, y tiene una asíntota oblicua en la ecuación $y = x$.

b) Cálculo de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$:

Para averiguar la monotonía de la función, buscan los puntos críticos del a función. Para conseguirlos, se iguala a 0 la primera derivada, y se despeja la x. Seguidamente, se hacen intervalos considerando el dominio de la función ($Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$), y se hacen cortes en el mismo, usando como referencia los puntos de críticos de la función:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = 0 \rightarrow 1 = \frac{2}{x^2} \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
Valor de x	-2	-1	1	2
Signo de $f'(x)$	> 0	< 0	< 0	> 0
Interpretación	Crece	Decrece	Decrece	Crece

Conclusión:

La función es creciente en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ y $\sqrt{2}, \infty)$, y decreciente en los intervalos $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(0, \sqrt{2}\right)$. Presenta un máximo en $x = -\sqrt{2}$, y un mínimo en $x = \sqrt{2}$.

B.4. (2 puntos) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramón y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2021 se presentaron 2159 solicitudes en la modalidad general y 1316 en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1%, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1%. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

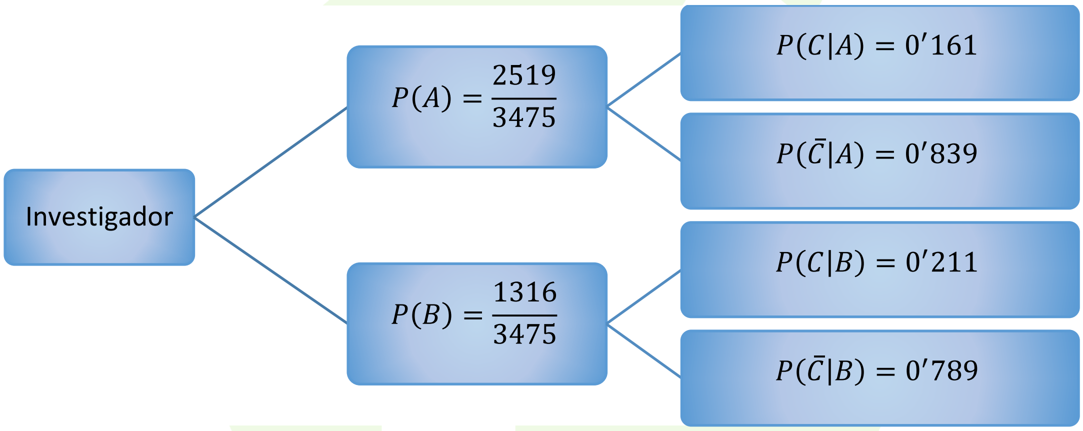
a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.
b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

Resolución:

Primeramente, se definen los sucesos siguientes:

- $A =$ Contratación general: $P(A) = \frac{2159}{3475}$
- $B =$ Contratación de jóvenes doctores: $P(B) = \frac{1316}{3475}$
- $C|Suceso =$ Probabilidad de recibir ayudas si ocurrieron los sucesos A o B.
- $\bar{C}|Suceso =$ Probabilidad de que no recibir ayudas si ocurrieron los sucesos A o B

Con esta información, se plantea el árbol de probabilidad:



Con todo esto, puede resolverse el ejercicio.

a) <u>Cálculo de la probabilidad de que sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal:</u>

Para resolver este ejercicio, se aplicará el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B) =$$

$$= \frac{2159}{3475} \cdot 0'161 + \frac{1316}{3475} \cdot 0'211 = 0'1799$$

Conclusión:

La probabilidad de recibir las ayudas Ramón y Cajal es de un 17'99%.

b) Cálculo de la probabilidad de que la solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado:

Para resolver este ejercicio, se aplicará el Teorema de Bayes:

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(C/A)}{P(C)} = \frac{\frac{2159}{3475} \cdot 0'161}{0'1799} = \frac{0'1}{0'1799} = 0'5559 \cong 55'59\%$$

Conclusión:

La probabilidad de que la solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado, es de un 55'59%.

B.5. (2 puntos) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99% para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90%.

Resolución:

a) Cálculo del intervalo de confianza:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow IC(\bar{x})_{0,95} = \left(50 \pm 2'575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}}\right) = (50 \pm 1{,}15) = (48'85; 51'15)$$

NOTA: Cálculo de $z_{\alpha/2}$: $1 - \frac{1-\alpha}{2} = 1 - \frac{1-0{,}99}{2} = 0'995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2'575$

Conclusión:

La distancia media recorrida por un autobús urbano estará comprendida entre 48'85 Km y 51'15 Km, con una confianza del 99%

b) Cálculo del tamaño de la muestra:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n = \left(\frac{1'645 \cdot 2}{1}\right)^2 = 10'82 \cong 11$$

NOTA: Cálculo de $z_{\alpha/2}$: $1 - \frac{1-\alpha}{2} = 1 - \frac{0{,}1}{2} = 0'95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'645$

Conclusión:

El tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90%, será de al menos 11 autobuses.