INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B de 24 toneladas y los de tipo C de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Sea x el número de camiones de tipo A, y el de tipo B, z el de tipo C. Nos dicen que si a x le sumamos 1 tenemos tantos camiones como de las otras dos juntas, es decir, x+1=y+z. A continuación nos dicen que un diez por ciento de la capacidad de los de tipo B (es decir, un 10% de 24y, es decir, 2,4y) es un séptimo de la capacidad de los camiones de mayor tonelaje, que es 28z/7. De aquí sacamos una segunda ecuación, $1{,}4y = 4z$. Por último, en total se han extraido 302 toneladas de tierra. La tierra extraida será la que extrae cada camión A por el número de camiones de tipo A (14x) mas la capacidad de B por el número de camiones B (24y) más la capacidad de C por el número de camiones C, 28z. Con esto tenemos nuestra tercera ecuación,

14x+24y+28z=302.

Tenemos entonces un sistema de tres ecuaciones,

$$x - y - z = -1,$$

$$2{,}4y - 4z = 0$$

$$14x + 24y + 28z = 302.$$

Podemos resolver el sistema por Cramer, obteniendo los siguientes números de camiones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2,4 & -4 \\ 302 & 24 & 28 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2,4 & -4 \\ 14 & 24 & 28 \end{vmatrix}} = 7$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -4\\ 14 & 302 & 28\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2,4 & -4\\ 14 & 24 & 28\end{vmatrix}}=5$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2,4 & 0\\ 14 & 24 & 302\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2,4 & -4\\ 14 & 24 & 28\end{vmatrix}}=3$$

Como no nos pedían el número de camiones sino la tierra transportada por cada uno, multiplicamos el número de camiones de cada tipo por la capacidad de los camiones de ese tipo. Tenemos así:

Cantidad transportada por A: 7x14=98 toneladas

Cantidad transportada por B: 5x24=120 toneladas.

Cantidad transportada por C: 3x28=84 toneladas.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $\boldsymbol{f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto x = 1

c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

a) Recordamos que una función es par si f(-x)=f(x), y es impar si f(-x)=-f(x). Vamos a ver cuánto vale f(-x) en nuestro caso:

   $f(-x)=\sqrt[3]{((-\boldsymbol{x})^2-\mathbf{1})^2}=\sqrt[3]{(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1})^2}=\boldsymbol{f(x)}$, donde hemos usado $(-x)^2=x^2$. Por lo tanto la función será par.

b) Para poder derivar más fácilmente reescribimos la función como $\boldsymbol{f(x)=(x^2-1)^{2/3}}$. Ahora, usando la regla de la cadena, podemos derivar muy fácilmente:

$$f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-1)^{2/3-1}\cdot 2x=\frac{4}{3}(x^2-1)^{-1/3}x=\frac{4x}{3(x^2-1)^{1/3}}$$

   Vemos que la derivada no está definida en x=1 ni en x=-1, ya que habría una división entre cero, por lo que no parece derivable en esos puntos. Para asegurarnos, estudiamos los límites laterales de la derivada: si coinciden, este problema se podría evitar. Pero si los calculamos vemos que

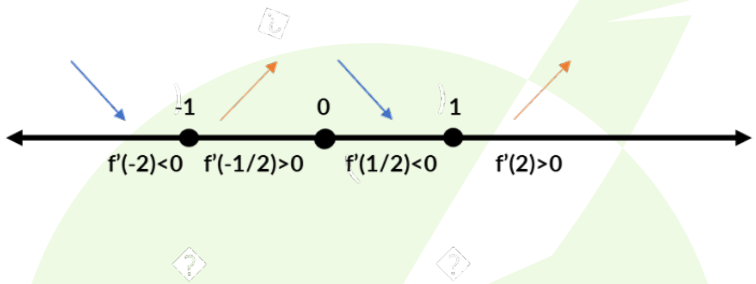
$$\lim_{x\to 1+} \frac{4x}{3(x^2-1)^{1/3}} = \frac{4}{0+} = \infty \quad \lim_{x\to 1-} \frac{4x}{3(x^2-1)^{1/3}} = \frac{4}{0-} = -\infty.$$

El límite no existe, así que la función no es derivable en x=1. Además, por paridad sabemos que tampoco será derivable en x=-1.

c) Los extremos relativos y absolutos se buscan en los puntos donde la derivada vale 0 y donde no está definida. Sabemos que no está definida ni en x=1 ni en x=-1, así que eso son dos candidatos. Vamos a buscar los puntos donde la derivada vale 0.

$$f'(x) = \frac{4x}{3(x^2-1)^3} = 0 \to 4x = 0 \to x = 0.$$

Nos hacemos una tabla con los candidatos a extremos:



	Intervalos o puntos
Decrece	$(-\infty,-1) \cup (0,1)$
Crece	$(-1,0) \cup (1,\infty)$
Máximos:	(0,f(0))=(0,1)
Mínimos:	No tiene

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos A(1, - 2, 3) B(0, 2, - 1) y C(2, 1, 0) Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano z = 1

c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

a) Normalmente, cuando tenemos tres puntos siempre forman un triángulo, salvo tal vez si los tres están alineados. Por lo tanto tendremos que comprobar que no están alineados. Para ello vamos a calcular el vector AB que une A y B, el vector AC que une A y C, y ver que no son proporcionales.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,4,-4)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,3,-3).$$

Estos dos vectores no son proporcionales, así que A, B y C no están alineados, así que forman un triángulo.

Además, al no estar alineados, definen un plano también. Para construir un plano necesitamos un punto (Por ejemplo, A, aunque valen también B y C) y dos vectores (como AB y AC). Bastará con usar la fórmula correspondiente:

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

es decir, $\pi \equiv -7y - 7z + 7 = 0$, o, simplificando, $\pi = y + z - 1 = 0$.

b) Empezamos construyendo la recta que pasa por A y B. Esto se hace a partir de un punto (A) y un vector (AB). Vamos a hacerla en forma vectorial. Usando la fórmula,

$$r \equiv (x, y, z) = (1, -2,3) + t(-1,4, -4).$$

Queremos ver cuánto valen x e y cuando z=1. Para ello igualamos la coordenada z a 1, obteniendo $1 = 3 - 4t \rightarrow t = 1/2$. Esto nos dice que z=1 cuando t=½. Pero cuando t sea ½, x e y serán $x = 1 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$. $y = -2 + \frac{1}{2}4 = 0$.

Con esto, el punto que buscamos es $(\frac{1}{2}, 0, 1)$.

c) El diámetro del triángulo es simplemente la suma de las longitudes de sus lados, que son AB, AC y BC. AB y AC los tenemos por el primer apartado, y $\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -1,1)$. Calculámos los módulos de cada uno:

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{33}, |AC| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19},$$

$|BC| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Sumándolas, el perímetro del triángulo es

$$P = |AB| + |AC| + |BC| = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6}u.$$

A.4Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad P(A) = 0.3

a) **(0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad P(B) = 0.5 es independiente de A. Calcule $\boldsymbol{P(A\cup B)}$.**

b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $\boldsymbol{P(C|A)=0,5}$. Determine $\boldsymbol{P(A\cap \bar{C})}$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $\boldsymbol{P(\underline{A}|D)=0,2}$ y P(D|A)=0.5. Calcule P(D)

a) Recordamos que $P(A\ U\ B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Conocemos cuanto vale P(A), P(B), y solo nos faltaría averiguar $P(A\cap B)$ para tenerlo. En el enunciado nos dicen que A y B son independientes, es decir, que $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0{,}3\cdot 0{,}5=0{,}15$.

b) Sabemos que $P(A\cap \underline{C})=P(A)-P(A\cap C)$. Conocemos P(A) y nos falta averiguar $P(A\cap C)$. Pero en el enunciado nos dicen P(C|A) que, por el teorema de Bayes, es $P(C|A)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}$.

De aquí concluimos que $P(A\cap C)=P(C|A)P(A)=0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}15$

Sustituyendo en la fórmula anterior, $P(A\cap \underline{C})=0{,}3-0{,}15=0{,}15$.

c) Vamos a utilizar el teorema de Bayes para reescribir lo que nos dicen en el enunciado. Tenemos

$P(\underline{A}|D)=\frac{P(\underline{A}\cap D)}{P(D)}=0{,}2\rightarrow P(D)=\frac{P(\underline{A}\cap D)}{0{,}2}$

$$P(D|A)=\frac{P(A\cap D)}{P(A)}=0{,}5\rightarrow P(A\cap D)=0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}15.$$

Podemos escribir $P(\underline{A}\cap D)$ en términos de $P(A\cap D)$? Sí, recordando que $P(\underline{A}\cap D)=P(D)-P(A\cap D)$. Sustituyendo esto en la ecuación de P(D) tenemos

$$P(D)=\frac{P(D)-P(A\cap D)}{0{,}2}\rightarrow 0{,}2P(D)=P(D)-P(A\cap D)\rightarrow -0{,}8P(D)=-P(A\cap D)$$

y de aquí concluimos $P(D)=\frac{P(A\cap D)}{0{,}8}=\frac{0{,}15}{0{,}8}=0{,}1875$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases}(a+1)x+4y=0\\(a-1)y+z=3\\4x+2ay+z=3\end{cases}$**, se pide:**

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para a = 3

c) (0.75 puntos) Resolverlo para a = 5 .

Nuestro sistema está descrito por la matriz A* dada por

$$A^* = \begin{pmatrix} (a+1) & 4 & 0 & 0 \\ 0 & (a-1) & 1 & 3 \\ 4 & 2a & & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos los rangos de A y de A* para aplicar el teorema de Rouché-Frobenius.

En primer lugar estudiamos el rango de A a partir de su determinante. Tenemos que $|A| = -a^2 - 2a + 15$. ¿Cuando vale cero? $-a^2 - 2a + 15 = 0 \to a = 3, -5$. Por tanto, si $a \neq 3, -5$, $|A| \neq 0 \to Rg(A) = 3 \to Rg(A^*) = 3$.

Vamos a estudiar esos dos casos especiales: si a=3, la matriz A* tiene la forma

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos que la tercera fila es la suma de las dos anteriores, por lo que Rg(A*)<3. Como hay una submatriz de 2x2 con determinante distinto de 0, $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Rg(A)=2, Rg(A*)=2.

Por último, si a=-5, la matriz A* tiene la forma

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta vez vemos que la tercera fila es la segunda menos la primera. Como, igual que antes, hay una submatriz de 2x2 con determinante distinto de 0, $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, Rg(A)=2, Rg(A*)=2.

Con esto ya tenemos todo y podemos aplicar el teorema de Rouché-Frobenius:

Si a no es ni 3 ni -5, Rg(A)=Rg(A*)=nº variables, así que tendremos un SCD.

Si a es 3 o -5, Rg(A)=Rg(A*)<nº variables, tendremos un SCI.

b) Para el caso a=3 tenemos un SCI, por lo que tendremos que resolverlo por Gauss.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, nos queda el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

Para resolverlo podemos elegir convertir una variable en parámetro, $y = \lambda$, con lo que $x = -\lambda, z = 3 - 2\lambda$.

Con eso, la solución es

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

c) En el caso a=5 tenemos un SCD y podemos resolverlo por Cramer.

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}} = 0$$

$$y = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}} = 0$$

$$z = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}} = 3$$

.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos. Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & si\ x \le -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & si\ x > -1 \end{cases}$

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to -\infty} f(x)^{2x^2-1}$

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

a) El dominio de esta función es : $Dom\big(f(x)\big) = \mathbb{R} - \{x = 1\}$

Esta función es continua en todo su dominio, salvo quizás en x=-1 por haber un cambio de rama en mi función a trozos. En x=1 la función no está definida, por lo que no tiene sentido estudiar su continuidad en dicho punto (existe una singularidad, que puede tener o no comportamiento asintótico en un entorno cerca de dicho valor).

Para x=-1

$$f(-1) = \frac{1}{3} = lim_{x\to -1^-}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right) = lim_{x\to -1^+}\left(\frac{2x^2}{3-3x}\right) = \frac{1}{3}$$

Dado que los límites laterales en torno a x=-1 y mi función evaluada en dicho punto toman el mismo valor, mi función es continua en dicho punto.

b) Debemos tener en cuenta qué región contiene al menos infinito.

$$lim_{\,x\to -\infty}\left(\frac{x^2}{2\,+\,x^2}\right)^{2x^2-1} = 1^{\infty} = e^{lim_{\,x\to -\infty}(2x^2-1)\left(\frac{x^2}{2\,+\,x^2}-1\right)} = e^{-4}$$

c) Se trata de la intergral que contiene a los valores superiores a -1, se trata de una integral racional:

$$\int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3\,-\,3x}dx = \frac{1}{3}(ln4-1)$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dada la recta

$\boldsymbol{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}}$,

el plano $\pi \equiv x - z = 2$ y el punto A(1, 1, 1) se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

a) Para estudiar la posición relativa de la recta respecto del plano podemos comenzar comprobando el producto escalar entre el vector director de la recta y el vector normal al plano:

$$\overrightarrow{V_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = (2,1,-2)(1,0,-1) = 4$$

Dado que el producto escalar no es nulo, podemos asegurar, sin necesidad de más pruebas que la recta y el plano se cortan en un punto. Para encontrar su intersección primero obtenemos las ecuaciones paramétricas de dicha recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituimos las paramétricas de r en el plano dado y determinamos el valor del parámetro.

$1 + 2\lambda - (-1 - 2\lambda) = 2 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$

Sustituyendo este valor en las paramétricas de la recta encontramos el punto intersección, que coincide con el dado en la ecuación continua de la recta en el enunciado.

$$p = (1,0,-1)$$

b) Para determinar la proyección ortogonal del punto A sobre el plano, basta con establecer una recta s que sea perpendicular al plano y pase por dicho punto. La proyección será la intersección de esta recta con el plano dado en el enunciado.

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo estas paramétricas de la recta s en el plano encontramos el valor del parámetro para definir el punto intersección

$$1 + \lambda - (1 - \lambda) = 2 \rightarrow \lambda = 1$$

De modo que sustituyendo el parámetro en las ecuaciones paramétricas obtenemos las coordenadas del punto.

$$p_{proy} = (2,1,0)$$

c) Para calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r, basta con encontrar el punto medio entre el punto A y su simétrico A’. Para ello definimos un nuevo plano que sea perpendicular a r y contenga al punto A. (Recueda que el vector normal al nuevo plano, será por tanto el vector director de r, por ello podemos construir directamente su ecuación implícita o general):

$$\pi' \equiv 2x + y - 2z + D = 0 \;\rightarrow\; \pi' \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0$$

El punto medio es la intersección entre la recta r y el plano, tomando las paramétricas de la recta tenemos

$$2(1 + 2\lambda) + \lambda - 2(-1 - 2\lambda) - 1 = 0 \rightarrow \; \lambda = -\frac{1}{3}$$

Por ello, el punto medio es:

$$A_m = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

El punto simétrico lo calcularemos como:

$$A' = 2A_m - A = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 y puntos

La longitud de la sardina del Pacífico (Sardinops sagax) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

a) Buscamos las sardinas que cumplan $P(x > 160mm)$ empleando la distribución normal y tipificando:

$$P(X > 160mm) = 1 - p(X \leq 160mm)$$

Debemos tipificar:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} = \frac{(160 - 175)}{25{,}75} = -0{,}5825$$

$$P(X > 160mm) = 1 - P(Z \leq -0{,}5825) = 1 - (1 - P(Z \leq 0{,}5825)) \approx P(Z \leq 0{,}58) = \cdots$$

$$= 0{,}7190$$

Por lo tanto, el 71,90% de las sardinas capturadas son de la calidad que espera la empresa envasadora.

b) Para hallar la longitud tendremos que obtenerlo a partir de la siguiente probabilidad:

$$P(t < X < 175) = P(X \leq 175) - P(X \leq \mathrm{t}) = 0{,}18$$

Tipificando:

$$P(Z \leq 0) - P\left(Z \leq \frac{t-175}{25{,}75}\right) = 0{,}18 \;\rightarrow\; P\left(Z \leq \frac{t-175}{25{,}75}\right) = 0{,}32$$

Dado que 0,32 no está en la tabla, debemos aplicar propiedades:

$$P\left(Z \leq \frac{t-175}{25{,}75}\right) = 1 - P\left(Z \leq -\frac{t-175}{25{,}75}\right) \rightarrow \; P\left(Z \leq -\frac{t-175}{25{,}75}\right) = 0{,}68$$

De modo que buscando el valor de Z para 0,6800 en la tabla se tiene:

$$-\frac{t-175}{25{,}75} = 0{,}465$$

$$t = 175 - 25{,}75 \cdot 0{,}465 = 163{,}02 \approx 163\ mm$$

La longitud deseada son 16,3 cm.

c) Debemos conocer primero la probabilidad de que una sardina sea menor a 15 cm

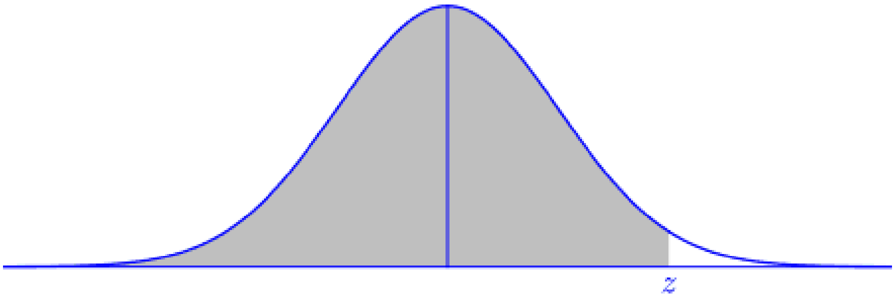
$$P(X \leq 150\text{mm}) = P\left(Z \leq \frac{150-175}{25{,}75}\right) = P(Z \leq -0{,}97) = 1 - P(Z \leq 0{,}97) = 1 - 0{,}8340 = 0{,}166$$

Esta es la probabilidad de que tengamos una pieza menor a 15cm, dado que repetimos el experimento 10 veces puesto que los envases poseen 10 piezas, la probabilidad seguirá una distribución binomial:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}(0{,}166)^0(1-0{,}166)^{10} \approx 0{,}8372$$

La probabilidad de tener al menos una pieza menor a 15 cm es de 0,8372 o bien un 83,72%.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990