PARTE 1: CUESTIONES

1. De un experimento se sabe que $P(A) = 0'25$, $P(B) = 0'6$, y $P(A|B) = 0'15$. La probabilidad de $A \cap B$ es de:
   a) 0'09
   b) 0'45
   c) 0'76

2. Si la variable aleatoria X sigue una distribución, $N(4; 9)$, siempre se puede afirmar que:
   a) $Z = \frac{X-4}{9}$ sigue una distribución $N(0; 1)$.
   b) $Z = \frac{X+4}{9}$ sigue una distribución $N(0; 1)$.
   c) $Z = \frac{X-9}{4}$ sigue una distribución $N(0; 1)$.

3. Si el error máximo admisible, E, para una muestra de tamaño n viene dado por $E = z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se puede afirmar que:
   a) Cuanto mayor es $(1-\alpha)$ mayor el error E.
   b) Cuanto menor es $(1-\alpha)$ mayor el error E.
   c) Cuanto mayor es $(1-\alpha)$ menor el error E.

4. El intervalo de confianza para el parámetro μ de una población $N(\mu, \sigma)$ al nivel de confianza $1-\alpha$ viene dado por:
   a) $IC = \left(\bar{x} \pm z_{(1-\alpha)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
   b) $IC = \left(\bar{x} \pm z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
   c) $IC = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

5. La función $f(x) = \frac{7}{x-7}$ presenta una discontinuidad en el punto $x = 7$
   a) Inevitable de salto infinito.
   b) Discontinuidad evitable
   c) Ninguna de las otras

6. Dada la función $f(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^3+27}}$; el dominio de la función es:
   a) $(-3, \infty)$
   b) $(3, \infty)$
   c) Ninguna de las otras.

7. La función $f(x) = \frac{8x^2}{x-2}$ tiene un mínimo en el punto:
   a) $x = 4$
   b) $x = 0$
   c) Ninguna de las otras

8. Hallar $\int(-3x^{4/5}+2\sqrt[5]{x^4})dx$
   a) $-5x^{9/5}+C$
   b) $5x^{9/5}+C$
   c) Ninguna de las otras.

9. Una matriz A es escalar si se cumple que:
   a) Los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1.
   b) Es diagonal y los elementos de la diagonal son todos distintos.
   c) Ninguna de las otras.

10. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. El resultado de hacer $(3A+3B)^T$
    a) $\begin{pmatrix}6 & -9\\ -12 & 18\end{pmatrix}$
    b) $\begin{pmatrix}6 & -12\\ -9 & 18\end{pmatrix}$
    c) Ninguna de las otras.

11. Dada la siguiente inecuación $3x-7+4x\geq +4x-6+2x$. Los puntos $x=-1$ y $x=0$ son:
    a) Ambos valores son solución de la inecuación
    b) Ninguno de loas valores es solución de la inecuación
    c) El valor $x=-1$ no es solución y el valor $x=0$ es solución de la inecuación.

12. Dada la inecuación -$6x+8y-6\geq 2$. Un punto solución es:
    a) $(1,1)$
    b) $(0,1)$
    c) Ninguno de los anteriores.

PARTE 2: PROBLEMAS

1. Dadas las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=3\left[\begin{pmatrix}1&3\\6&3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\right]\ \mathbf{y}\ \boldsymbol{B}=3\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\\1&1\end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz A
b) Calcula la matriz B
c) Calcula la matriz X que verifica la ecuación: $3X+A=B$

Resolución:

a) Cálculo de la matriz A:

$$A=3\left[\begin{pmatrix}1&3\\6&3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\right]=3\left[\begin{pmatrix}1&3\\6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&12\\12&4\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}5&15\\18&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&45\\54&21\end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz A será $A=\begin{pmatrix}15&45\\54&21\end{pmatrix}$

b) Cálculo de la matriz B

$$B=3\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&4\\1&1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\cdot2+3\cdot1+1\cdot1&2\cdot3+3\cdot4+1\cdot1\\1\cdot2+2\cdot1+3\cdot1&1\cdot3+2\cdot4+3\cdot1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}8&19\\7&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&57\\21&42\end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz B será $B=\begin{pmatrix}24&57\\21&42\end{pmatrix}$

c) Cálculo de la ecuación $3X+A=B$

$$3X+A=B\rightarrow 3X=B-A\rightarrow X=\frac{1}{3}(B-A)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}24&57\\21&42\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15&45\\54&21\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9&12\\33&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\11&7\end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz X que verifica la ecuación: $3X+A=B$ será $X=\begin{pmatrix}3&4\\11&7\end{pmatrix}$

2. Dada la función $f(x)$ cuya segunda derivada es $f''(x) = -30x$, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(-2, 5)$:

- **a) Calcula la primera derivada de la función, $f'(x)$.**
- **b) Halla la función $f(x)$.**
- **c) Halla el máximo de la función $f(x)$.**

Resolución:

a) Cálculo de $f'(X)$:

i) Se obtiene $f'(x)$ resolviendo la integral de $f''(x)$:

$$f'(x) = \int -30x\,dx = -15x^2 + C$$

ii) Una vez obtenida $f'(x)$, para determinar el valor de C se tiene en cuenta que se indica que la función tiene un mínimo en $(-2{,}5)$. En lo que se traduce este dato es en que $f'(-2) = 0$. Considerando esto, el valor de C será:

$$f'(-2) = 0 \rightarrow -15(-2)^2 + C = 0 \rightarrow -15 \cdot 4 + C = 0 \rightarrow -60 + C = 0 \rightarrow C = 60$$

Solución:

La primera derivada de la función $f'(x) = -15x^2 + 60$n

b) Cálculo de la función $f(x)$:

i) Se obtiene $f(x)$ resolviendo la integral de $f'(x)$:

$$f(x) = \int (= -15x^2 + 60)dx = -5x^3 + 60x + C$$

iii) Una vez obtenida $f'(x)$, para determinar el valor de C se tiene en cuenta que se indica que la función tiene un mínimo en $(-2{,}5)$. En lo que se traduce este dato es en que $f(-2) = 5$. Considerando esto, el valor de C será:

$$f(-2) = -5(-2)^3 + 60(-2) + C = 5 \rightarrow -5(-8) - 120 + C = 5 \rightarrow 40 - 120 + C = 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow -80 + C = 5 \rightarrow C = 5 + 80 \rightarrow C = 85$$

Solución:

La función $f(x)$ será $f(x) = -5x^3 + 60x + 85$

c) Cálculo del máximo:

i) Dado que se sabe que la derivada de la función es $f'(x) = -15x^2 + 60$, al igualar a 0 dicha derivada, y despejar x, se obtendrán puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \rightarrow -15x^2 + 60 = 0 \rightarrow -15x^2 = -60 \rightarrow x^2 = \frac{-60}{-15} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

ii) Una vez obtenidos los puntos críticos, se hacen intervalos contando con el dominio de la función, y posteriormente se reemplaza en $f'(x)$. Si el signo de $f'(x)$ es positivo $(+)$, quiere decir que la función crece; y, si es negativo$(-)$, que decrece. Sobre esto, si el signo pasa de positivo $(+)$ a negativo $(-)$, indica que la función tiene un máximo; y, si pasa de negativo $(-)$ a positivo $(+)$, indica que la función tiene un mínimo:

Dominio	$(-\infty, -2)$	$(-2,2)$	$(2, \infty)$
Valor de x	-3	0	3
Signo de $f'(x)$	< 0	> 0	< 0
Interpretación	Decrece	Crece	Decrece

En el punto de abscisa $x = -2$, la primera derivada pasa de decrecer a crecer, lo que indica que tiene un mínimo (tal y como se indicaba en los datos iniciales del ejercicio)

En el punto de abscisa $x = 2$, la primera derivada pasa de crecer a decrecer, lo que implica que, en ese punto, la función presenta un máximo.

iii) Ya conocido dónde se encuentra el máximo, se reemplaza en $f(x)$, obteniéndose la coordenada y en la cual se sitúa dicho máximo:

$$y = f(2) = -5(2)^3 + 60(2) + 85 = -5(8) + 120 + 85 = -40 + 120 + 85 = 165$$

Solución:

La función presenta un máximo en la coordenada $(x; y) = (2;\ 165)$

3. En una empresa de productos cosméticos, se toma la siguiente muestra de 9 botes de crema hidratante, obteniendo los siguientes pesos en gramos:

$$\mathbf{88, 90, 90, 86, 87, 88, 91, 92, 89}$$

Se sabe que la distribución del peso de los botes de crema sigue una distribución normal con una desviación típica de 10'8g.

a) Determina la distribución que seguirá los pesos medios de los botes de crema.

b) Identifica los distintos parámetros que intervienen en la construcción del intervalo de confianza explicando su significado y el valor que toman.

c) Halla un intervalo de confianza al 95% para la media población.

Resolución:

a) Cálculo de la distribución de los pesos medios de los botes de crema:

Para resolver el ejercicio, se parte de que se sabe que la variable sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, y que la desviación típica es $\sigma = 1'8$, quedando que la distribución será $N(\mu, 1'8)$.

Sabiendo esto, es necesario determinar cuál es el valor de la media (μ). Para ello, se hace la media aritmética, a partir de los valores dados para la muestra:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9} = \frac{88 + 90 + 90 + 86 + 87 + 88 + 91 + 92 + 89}{9} = \frac{801}{9} = 89$$

Solución:

La distribución de los pesos medios de los botes de crema será $N(89{,}1'8)$

b) Elementos de un intervalo de confianza:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z\alpha_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leftrightarrow IC(\bar{x})_{1-\alpha} = (\bar{x} \pm E), \text{ donde } E = z\alpha_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\bar{x}$: Media muestral

$1 - \alpha$: Nivel de confianza. Se trata de la probabilidad de que la media esté dentro del intervalo.

$z\alpha_{/2}$: Valor crítico. Se trata de aquel el que, en una distribución $N(0{,}1)$ cumple que $P\left(-z\alpha_{/2} \leq Z \leq z\alpha_{/2}\right)$.

σ: Desviación típica. Muestra cómo de dispersos están los datos. Cuanto menor sea su valor, más concentrados están los datos.

n: Muestra. Se refiere al conjunto de datos pertenecientes a una población.

E: Error de estimación. Muestra la desviación máxima permitida para que un dato caiga dentro del intervalo.

c) Cálculo del intervalo de confianza al 95%:

$$IC(\bar{x})_{1-\alpha} = \left(\bar{x} \pm z\alpha_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow IC(\bar{x})_{0'95} = \left(89 \pm 1'96 \cdot \frac{1'8}{\sqrt{9}}\right) = (89 \pm 1'176) = (87'824; 90'176)$$

$$P\left(z\alpha_{/2} = j\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0'05}{2} = 0'975 \rightarrow z\alpha_{/2} = 1'96$$

Solución:

La media estará comprendida entre 87,824 gramos y 90,176 gramos, con una confianza del 95%.