EXAMEN FÍSICA

Universidad Complutense de Madrid

Convocatoria Extraordinaria. Curso 2018-2019

OPCIÓN A

1.

a)

Cuando un satélite recorre una órbita circular a una velocidad constante, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él es igual a la fuerza responsable de su movimiento. Deducimos el periodo orbital de las siguientes fórmulas:

$$\acute{O}rbita\ circular \rightarrow F_C = m \cdot a_C = m \cdot \frac{{v_o}^2}{r} \begin{cases} v_o: Velocidad\ orbital\ (v.lineal)\ (m/s) \\ m: Masa\ del\ satélite\ (kg) \\ r: Radio\ de\ la\ órbita\ (m) \rightarrow r = R + h \end{cases}$$

$$Fuerza\ gravitatoria \rightarrow F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \begin{cases} M: Masa\ del\ planeta\ (kg) \\ m: Masa\ del\ satélite\ (kg) \\ r: Dist.del\ satélite\ a\ la\ sup.del\ planeta\ (m) \rightarrow r = R + h \\ G: Constante\ de\ Gravit.Univ.\ (N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}) \end{cases}$$

$$F_C = F_G \rightarrow m \cdot \frac{{v_o}^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \rightarrow {v_o}^2 = G \cdot \frac{M}{r} \rightarrow v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R + h}}$$

$$V.orbital \rightarrow v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R + h}} \begin{cases} M: Masa\ del\ planeta\ (kg) \\ G: Constante\ de\ Gravit.Univ.\ (N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}) \\ r: Dist.del\ satélite\ a\ la\ sup.del\ planeta\ (m) \rightarrow r = R + h \end{cases}$$

El periodo orbital se deduce de la siguiente manera:

$${v_o}^2 = G \cdot \frac{M}{r} \rightarrow (w \cdot r)^2 = G \cdot \frac{M}{r} \rightarrow \left(\frac{2\pi}{T} \cdot r\right)^2 = G \cdot \frac{M}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2 = G \cdot \frac{M}{r} \begin{cases} v_o = w \cdot r \\ w = \dfrac{2\pi}{T} \end{cases}$$

$$Periodo\ orbital \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h)^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot [(6{,}37 \cdot 10^6) + (5{,}9 \cdot 10^6)]^3}{(6{,}67 \cdot 10^{-11}) \cdot (5{,}97 \cdot 10^{24})}} = \mathbf{13533{,}08\ s}$$

b)

Sabemos que la energía mecánica de un satélite que recorre una órbita circular es:

$$Energía\ mecánica\ del\ satélite\ en\ la\ órbita \rightarrow E_m(órb.) = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_o}^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

$$E_m(órb.) = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_o}^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{r} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{G \cdot M}{r}\right) - G \cdot \frac{m \cdot M}{r} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{r}$$

La energía mecánica de un satélite en la superficie de la Tierra es:

$$Energía\ mecánica\ del\ satélite\ en\ la\ superficie \rightarrow E_m(sup.) = E_p = -G \cdot \frac{m \cdot M}{R_T}$$

Por otro lado:

$$E_m(sup.) + W = E_m(órb.) \rightarrow -G \cdot \frac{m \cdot M}{R_T} + W = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{R_T + h}$$

$$W = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{m \cdot M}{R_T + h} + G \cdot \frac{m \cdot M}{R_T} \rightarrow W = G \cdot M \cdot m \left(\frac{-1}{2(R_T + h)} + \frac{1}{R_T}\right)$$

$$W = (6{,}67 \ \cdot 10^{-11}) \cdot (5{,}97 \ \cdot 10^{24}) \cdot 405 \cdot \left(\frac{-1}{2 \cdot [(6{,}37 \ \cdot 10^{6}) + (5{,}9 \ \cdot 10^{6})]} + \frac{1}{(6{,}37 \ \cdot 10^{6})}\right)$$

$$\boldsymbol{W = 1{,}87 \ \cdot 10^{10}\ J}$$

2.

a)

La potencia de la sirena se calcula con la ecuación:

$$\mathrm{I} = \frac{P}{S}\ (W/m^2) \begin{cases} P{:}\ Potencia\ de\ la\ onda\ sonora\ (W) \\ S{:}\ Superficie\ de\ la\ onda\ sonora \rightarrow S = 4\pi r^2 \rightarrow r = 200\ m \end{cases}$$

Para calcular la intensidad sonora de la sirena, conociendo el nivel de intensidad sonora, aplicamos la siguiente fórmula:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)(dB) \begin{cases} I{:}\ Intensidad\ de\ la\ onda\ sonora\ (W/m^2) \\ I_0{:}\ Intensidad\ umbral\ (W/m^2) \rightarrow I_0 = 10^{-12}\ W/m^2 \end{cases}$$

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{\beta}{10} \rightarrow \frac{I}{I_0} = 10^{\frac{\beta}{10}} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}$$

$$\beta = 80\ dB \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}} = 10^{-12} \ \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-12} \ \cdot 10^{8} = 10^{-4}\ W/m^2$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{I} \cdot \mathrm{S} = 10^{-4} \cdot (4\pi \cdot (200)^2) = \boldsymbol{50{,}26\ W}$$

b)

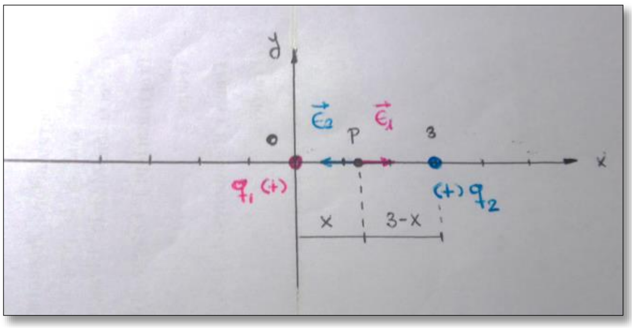
La distancia, medida desde la posición de la sirena, a la que debemos colocar el detector para que mida la misma intensidad sonora cuando la sirena tiene una potencia: $P_2 = 2P_1$

$$I_1 = I_2 \rightarrow \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2} \rightarrow \frac{P_1}{4\pi {r_1}^2} = \frac{2P_1}{4\pi {r_2}^2} \rightarrow \frac{1}{{r_1}^2} = \frac{2}{{r_2}^2} \rightarrow r_2 = \sqrt{2} \cdot r_1 = \sqrt{2} \cdot 200 = \mathbf{282,84\ m}$$

3.

a)

Sabemos que las cargas q_1 y q_2 son cargas positivas y una el doble que la otra, y que están situadas en los puntos O (0, 0) y P (3, 0) respectivamente:



$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{d^2}\,\vec{u}\ (N/C) \quad \begin{cases} k\text{: Constante de la ley de Coulomb } (N \cdot m^2 \cdot C^{-2}) \\ q\text{: Carga eléctrica que genera el campo } (C) \\ d\text{: Distancia de la carga al punto de estudio } (m) \end{cases}$$

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = 0 \rightarrow \overrightarrow{E_1} = -\overrightarrow{E_2}$$

Como los vectores $\overrightarrow{E_1}$ y $\overrightarrow{E_2}$ están situados en el eje x, podemos afirmar que, para que el campo se anule, sus módulos tienen que tener el mismo valor: $E_1 = E_2$

$$E_1 = E_2 \rightarrow k \cdot \frac{q_1}{d_1^2} = k \cdot \frac{q_2}{d_2^2} \rightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(3-x)^2} \rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{x^2}{(3-x)^2} \rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{x}{3-x}\right)^2 \rightarrow \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} = \frac{x}{3-x}$$

$$\sqrt{\frac{q_1}{q_2}} = \frac{x}{3-x} \rightarrow \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \cdot (3-x) = x \rightarrow \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}}} \cdot (3-x) = x \rightarrow 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - x \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = x$$

El punto del espacio donde el campo es nulo será:

$$x\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow \boldsymbol{x = 1,24\ m}$$

b)

Para calcular el trabajo necesario para traer un electrón desde el punto A (3, 4) hasta el punto B (2, 0) recurrimos a la siguiente fórmula:

$$W_{A\rightarrow B} = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_B - V_A)$$

Por otro lado, para calcular el valor del potencial eléctrico en los puntos A y B:

$$V = k \cdot \frac{q}{d}\ (V) \quad \begin{cases} k: Constante\ de\ la\ ley\ de\ Coulomb\ (N \cdot m^2 \cdot C^{-2}) \\ q: Carga\ eléctrica\ que\ genera\ el\ campo\ (C) \\ d: Distancia\ de\ la\ carga\ al\ punto\ de\ estudio\ (m) \end{cases}$$

$$V_A = V_{q1} + V_{q2} = k \cdot \frac{q_1}{d_{q1-A}} + k \cdot \frac{q_2}{d_{q2-A}} = k \cdot \left(\frac{q_1}{d_{q1-A}} + \frac{q_2}{d_{q2-A}}\right)$$

$$V_A = k \cdot \left(\frac{q_1}{d_{q1-A}} + \frac{q_2}{d_{q2-A}}\right) = (9 \cdot 10^9) \cdot \left(\frac{(10 \cdot 10^{-6})}{5} + \frac{(20 \cdot 10^{-6})}{4}\right) = 63000\ V$$

$$V_B = V_{q1} + V_{q2} = k \cdot \frac{q_1}{d_{q1-B}} + k \cdot \frac{q_2}{d_{q2-B}} = k \cdot \left(\frac{q_1}{d_{q1-B}} + \frac{q_2}{d_{q2-B}}\right)$$

$$V_B = k \cdot \left(\frac{q_1}{d_{q1-B}} + \frac{q_2}{d_{q2-B}}\right) = (9 \cdot 10^9) \cdot \left(\frac{(10 \cdot 10^{-6})}{2} + \frac{(20 \cdot 10^{-6})}{1}\right) = 225000\ V$$

Sustituyendo obtenemos el valor del trabajo buscado:

$$W_{A\rightarrow B} = -q \cdot \Delta V = -q \cdot (V_B - V_A) = -(-1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (225000 - 63000) = \mathbf{2{,}59 \cdot 10^{-14}\ J}$$

NOTA: El signo positivo del trabajo indica que la fuerza aplicada para desplazar la carga sigue el desplazamiento natural que realizaría dicha carga, es decir, es el campo quien realiza el trabajo para desplazar el electrón del punto A al punto B.

4.

a)

La información que nos proporcionan es la siguiente:

- Distancia de la lente al foco F': $f' = 10\ cm$
- Distancia de la lente al foco F: $f = -10\ cm$
- Distancia de la imagen a la lente: $s' = 14\ cm$
- Tamaño del objeto : $y = 1\ cm$

Aplicando la ecuación general de las lentes obtenemos la posición del objeto.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{14} - \frac{1}{s} = \frac{1}{10} \rightarrow \frac{1}{s} = \frac{1}{14} - \frac{1}{10} = \frac{-1}{35} \rightarrow \boldsymbol{s = -35\ cm}$$

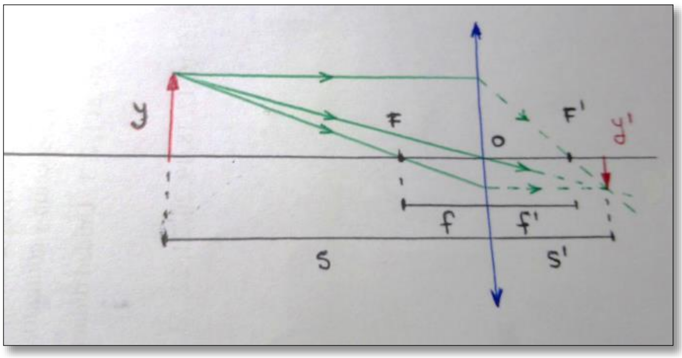
Para calcular el tamaño de la imagen utilizaremos la fórmula del aumento lateral:

$$Aumento\ lateral \rightarrow A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \begin{cases} y = 1\ cm \rightarrow Altura\ del\ objeto \\ s' = 14\ cm\ \rightarrow Distancia\ de\ la\ imagen\ a\ la\ lente \\ s = -35\ cm \rightarrow Distancia\ del\ objeto\ a\ la\ lente \end{cases}$$

$$y' = \frac{s' \cdot y}{s} = \frac{14 \cdot 1}{-35} = \mathbf{-0,4\ cm}\ \rightarrow Altura\ de\ la\ imagen\ (está\ invertida, tiene\ valor\ negativo)$$

b)

Siguiendo las pautas del enunciado realizamos la siguiente representación:



NOTA: Tenemos en cuenta el siguiente criterio de signos:
- *Zona a la derecha de la lente: +*
- *Zona a la izquierda de la lente: -*
- *Parte superior del eje x: +*
- *Parte inferior del eje x: -*

5.

a)

Se ilumina el material con dos longitudes de onda diferentes obteniendo los siguientes datos:

$$\lambda_1 = 589\ nm = 589 \cdot 10^{-9}\ m \rightarrow E_{c\ máx.1} = 0{,}577\ eV = 0{,}577 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19}) = 9{,}23 \cdot 10^{-20}\ J$$

$$\lambda_2 = 179{,}76\ nm = 179{,}76 \cdot 10^{-9}\ m \rightarrow E_{c\ máx.2} = 5{,}38\ eV = 5{,}38 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19}) = 8{,}61 \cdot 10^{-19}\ J$$

La energía cinética máxima de los electrones emitidos puede calcularse como la diferencia entre la energía del fotón absorbido y el trabajo de extracción:

$$E_{c\,máx.} = E_f - W_{ext.} = h \cdot f - h \cdot f_0\ (J) \begin{cases} h: Constante\ de\ Planck\ (J \cdot s) \\ f: Frecuencia\ de\ la\ radiación\ (s^{-1}) \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} \\ f_0: Frecuencia\ umbral\ (s^{-1}) \\ \lambda: Longitud\ de\ onda\ de\ la\ radiación\ (m) \\ c: Velocidad\ de\ la\ luz\ en\ el\ vacío\ (m/s) \end{cases}$$

$$E_{c\,máx.} = h \cdot f - h \cdot f_0 = h \cdot (f - f_0) = h \cdot \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_0}\right) = h \cdot c \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

Aplicando esta ecuación a cada uno de los experimentos:

$$\lambda_1 = 589 \cdot 10^{-9}\, m \rightarrow W_{ext.} = E_f - E_{c\,máx.} = h \cdot f - E_{c\,máx.} = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - E_{c\,máx.1}$$
$$\lambda_2 = 179{,}76 \cdot 10^{-9}\, m \rightarrow W_{ext.} = E_f - E_{c\,máx.} = h \cdot f - E_{c\,máx.} = h \cdot \frac{c}{\lambda_2} - E_{c\,máx.2}$$

Sabiendo que el trabajo de extracción no varía:

$$h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - E_{c\,máx.1} = h \cdot \frac{c}{\lambda_2} - E_{c\,máx.2} \rightarrow h \cdot \left(\frac{c}{\lambda_1} - \frac{c}{\lambda_2}\right) = E_{c\,máx.1} - E_{c\,máx.2}$$
$$h \cdot (3 \cdot 10^8) \cdot \left(\frac{1}{589 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{179{,}76 \cdot 10^{-9}}\right) = (9{,}23 \cdot 10^{-20}) - (8{,}61 \cdot 10^{-19})$$

$$h \cdot (-1{,}16 \cdot 10^{15}) = -7{,}69 \cdot 10^{-19} \rightarrow \boldsymbol{h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}$$

Sustituyendo en cualquiera de las expresiones anteriores obtenemos el valor del trabajo de extracción:

$$W_{ext.} = E_f - E_{c\,máx.} = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - E_{c\,máx.1} = (6{,}63 \cdot 10^{-34}) \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^8}{589 \cdot 10^{-9}}\right) - (9{,}23 \cdot 10^{-20})$$

$$\boldsymbol{W_{ext.} = 2{,}45 \cdot 10^{-19}\, J}$$

b)

La longitud de onda de de Broglie se obtiene mediante la expresión:

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

Por otro lado sabemos que:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow m \cdot v^2 = 2 \cdot E_c \rightarrow m^2 \cdot v^2 = 2 \cdot E_c \cdot m \rightarrow m \cdot v = \sqrt{2 \cdot E_c \cdot m}$$
$$\lambda_{DB} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_c \cdot m}}$$

En el segundo experimento, la longitud de onda de de Broglie del electrón será:

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_{c\,máx.2} \cdot m}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot (8{,}61 \cdot 10^{-19}) \cdot (9{,}1 \cdot 10^{-31})}} = \boldsymbol{5{,}29 \cdot 10^{-10}\, m}$$

OPCIÓN B

1.

a)

Cuando un satélite recorre una órbita circular a una velocidad constante, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él (en este caso la fuerza que ejerce Júpiter) es igual a la fuerza responsable de su movimiento (fuerza centrípeta).

$$\acute{O}rbita\ circular \rightarrow F_C = m \cdot a_C = m \cdot \frac{{v_o}^2}{r} \begin{cases} v_o: Velocidad\ orbital\ (v.lineal)\ (m/s) \\ m: Masa\ del\ satélite\ (kg) \\ r: Radio\ de\ la\ órbita\ (m) \rightarrow r = R + h \end{cases}$$

$$Fuerza\ gravitatoria \rightarrow F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \begin{cases} M: Masa\ del\ planeta\ (kg) \\ m: Masa\ del\ satélite\ (kg) \\ r: Dist.del\ satélite\ a\ la\ sup.del\ planeta\ (m) \rightarrow r = R + h \\ G: Constante\ de\ Gravit.Univ.(N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}) \end{cases}$$

$$F_C = F_G \rightarrow m \cdot \frac{{v_o}^2}{r} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \rightarrow \frac{{v_o}^2}{r} = G \cdot \frac{M}{r^2} \rightarrow M = \frac{{v_o}^2 \cdot r^2}{G \cdot r} = \frac{{v_o}^2 \cdot r}{G}$$

Por otro lado, sabemos la velocidad en una órbita circular se puede calcular mediante la ecuación:

$${v_o}^2 = (w \cdot r)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2 \begin{cases} v_o = w \cdot r \\ w = \dfrac{2\pi}{T} \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la masa del planeta obtenemos:

$$M = \frac{{v_o}^2 \cdot r}{G} = \frac{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2\right) \cdot r}{G} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{T^2 \cdot G}$$

La masa de Júpiter será:

$$M_J = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{T^2 \cdot G} = \frac{4\pi^2 \cdot (671{,}1 \cdot 10^6)^3}{(3{,}55 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot (6{,}67 \cdot 10^{-11})} = \mathbf{1{,}9 \cdot 10^{27}\ kg}$$

b)

Para calcular la velocidad de escape del satélite desde la superficie de Júpiter tenemos que hacer un balance energético, para ello estudiamos la energía del satélite en los puntos inicial y final de la trayectoria.

$$E.mecánica\ del\ satélite\ en\ la\ sup.del\ planeta \rightarrow E_{m\,sup.} = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_e}^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R}$$

$$E.\,mecánica\ del\ satélite\ en\ el\ infinito\ \rightarrow E_{m\,\infty} = E_c + E_p = 0 - G \cdot \frac{m \cdot M}{\infty} = 0\,J$$

Como la energía mecánica es la misma en cualquier punto:

$$E_{m\,sup.} = E_{m\,\infty} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_e}^2 - G \cdot \frac{m \cdot M}{R} = 0 \rightarrow {v_e}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R} \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

Por lo que la velocidad de escape será:

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_J}{R_J}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (6{,}67\ \cdot 10^{-11}) \cdot (1{,}9\ \cdot 10^{27})}{699{,}11 \cdot 10^6}} = \boldsymbol{60211{,}8\ m/s}$$

2.

a)

De la ecuación de la onda transversal obtenemos los siguientes datos:

$$y(x,t) = 0{,}05\,cos(8\pi t - 4\pi x + \varphi_0)\begin{cases} Amplitud \rightarrow A = 0{,}05\,m \\ Velocidad\ angular \rightarrow\ w = 8\pi\ rad/s \\ Número\ de\ ondas \rightarrow k = 4\pi\ rad/m \\ Dir.\,de\ propagación\ onda \rightarrow sentido\ positivo\ del\ eje\ x \end{cases}$$

Sabemos que en el instante t = 5s, en un punto situado a x = 3m, la velocidad de oscilación es nula y la aceleración positiva. Entonces:

$$y(x,t) = A\,cos\big(wt \pm kx + \varphi_0\big)\begin{cases} v(x,t) = -A \cdot w \cdot sen\big(wt \pm kx + \varphi_0\big) \\ a(x,t) = -A \cdot w^2 \cdot cos\big(wt \pm kx + \varphi_0\big) \end{cases}$$

$$y(3,5) = 0{,}05\,cos(8\pi \cdot 5 - 4\pi \cdot 3 + \varphi_0)\begin{cases} v(3,5) = -0{,}05\ \cdot 8\pi \cdot sen\big(8\pi \cdot 5 - 4\pi \cdot 3 + \varphi_0\big) = 0 \\ a(3,5) = -0{,}05\ \cdot (8\pi)^2 \cdot cos\big(8\pi \cdot 5 - 4\pi \cdot 3 + \varphi_0\big) > 0 \end{cases}$$

$$v(3,5) = sen(8\pi \cdot 5 - 4\pi \cdot 3 + \varphi_0) = 0\begin{cases} 40\pi - 12\pi + \varphi_0 = 0\,rad \rightarrow \varphi_0 = -28\pi = 14 \cdot (-2\pi) = 0\,rad \\ 40\pi - 12\pi + \varphi_0 = \pi\,rad \rightarrow \varphi_0 = -27\pi = \pi\,rad \end{cases}$$

$$a(3,5) = -0{,}05\ \cdot (8\pi)^2 \cdot cos\big(8\pi \cdot 5 - 4\pi \cdot 3 + \varphi_0\big)\begin{cases} \varphi_0 = 0\,rad \rightarrow a(3,5) > 0 \\ \boldsymbol{\varphi_0 = \pi\,rad \rightarrow a(3,5) < 0} \end{cases}$$

Solución: El ángulo de fase inicial es $\boldsymbol{\varphi_0 = \pi\,rad}$

b)

En un movimiento uniforme: $s = v \cdot t \rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{x}{v} \rightarrow v{:}\,velocidad\ de\ propagación\ de\ la\ onda\ (m/s)$

Asimismo:

$$v_p = \frac{w}{k} = \frac{8\pi}{4\pi} = 2\ m/s$$

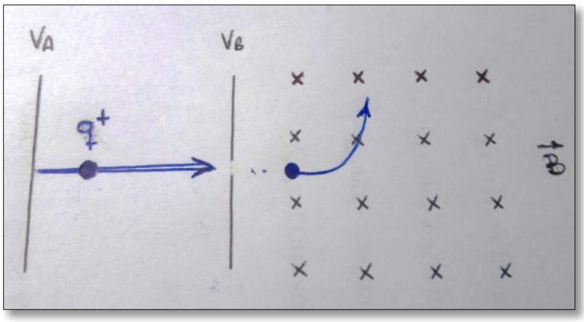
Como en el instante t = 0s la onda está en el origen de coordenadas (y = 0m; x = 0m), podemos utilizar la referencia anterior para calcular el tiempo que tarda la onda en llegar a la posición x = 8m.

$$x = 8\ m \rightarrow t = \frac{x}{v} = \frac{8}{2} = \mathbf{4\ s}$$

3.

a)

Cuando una partícula, cargada positivamente, penetra en un campo eléctrico la partícula se desplaza hacia la zona más electronegativa, es decir, hacia la zona de menor potencial, acelerándose.



Teniendo en cuenta que el campo eléctrico es conservativo, la energía cinética adquirida por la partícula durante este proceso será:

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \rightarrow \Delta E_c = W = -\Delta E_p = -q \cdot \Delta V$$

Posteriormente, cuando el positrón acelerado entra en el campo magnético, el campo ejerce una fuerza sobre el mismo, desviando su trayectoria.

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v}\ x\ \vec{B}) \begin{cases} q: Carga\ de\ la\ partícula\ (C) \\ \vec{v}: Velocidad\ de\ la\ partícula\ (m/s) \\ \vec{B}: Intensidad\ del\ campo\ magnético\ (T) \end{cases}$$

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \varphi\ (N) \begin{cases} q: Carga\ de\ la\ partícula\ (C) \rightarrow q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \\ v: Velocidad\ de\ la\ partícula\ (m/s) \\ B: Intensidad\ del\ campo\ magnético\ (T) \rightarrow B = 5\ \mu T = 5 \cdot 10^{-6}\ T \\ \varphi: Ángulo\ formado\ por\ B\ y\ v\ (rad) \rightarrow \varphi = 90° \end{cases}$$

La trayectoria que sigue la partícula tras haber sido desviada es circular, es decir, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre dicha partícula es una fuerza centrípeta.

$$Trayectoria\ circular \rightarrow F_C = m \cdot a_C = m \cdot \frac{v^2}{r} \begin{cases} v: Velocidad\ partícula\ (m/s) \\ m: Masa\ de\ la\ partícula\ (kg) \rightarrow m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg \\ r: Radio\ de\ la\ curva\ (m) \rightarrow r = 50\ cm = 0{,}5\ m \end{cases}$$

Como los módulos de las dos fuerzas son iguales:

$$F = F_C \rightarrow q \cdot v \cdot B \cdot sen\ \varphi = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{v^2}{v} = \frac{q \cdot B \cdot sen\ \varphi \cdot r}{m}$$

$$v = \frac{q \cdot B \cdot sen\ \varphi \cdot r}{m} = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) \cdot sen\ 90° \cdot 0{,}5}{9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 439560\ m/s$$

Entonces, sustituyendo en la expresión del incremento de energía cinética obtenemos:

$$\Delta E_c = -q \cdot \Delta V \rightarrow E_{cf} - E_{c0} = -q \cdot \Delta V \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(v^2{}_f - v^2{}_0\right) = -q \cdot \Delta V \rightarrow \Delta V = -\frac{m \cdot \left(v^2{}_f - v^2{}_0\right)}{2 \cdot q}$$

$$\Delta V = -\frac{(9{,}1 \cdot 10^{-31}) \cdot (439560^2 - 0)}{2 \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19})} = \boldsymbol{-0{,}55\ V}$$

NOTA: El signo negativo es debido a que las cargas positivas tienden a desplazarse hacia zonas de menor potencial, por lo tanto, si queremos acelerar una partícula positiva debemos someterla a una diferencia de potencial negativa.

b)

El valor de la frecuencia angular de giro del positrón en la órbita se deduce de la expresión de la velocidad lineal y de la velocidad angular.

$$w \cdot r = \frac{q \cdot B \cdot sen\ \varphi \cdot r}{m} \rightarrow w = \frac{q \cdot B \cdot sen\ \varphi}{m} = 2\pi f \begin{cases} velocidad\ lineal \rightarrow v = \dfrac{q \cdot B \cdot sen\ \varphi \cdot r}{m} \\ velocidad\ angular \rightarrow v = w \cdot r \end{cases}$$

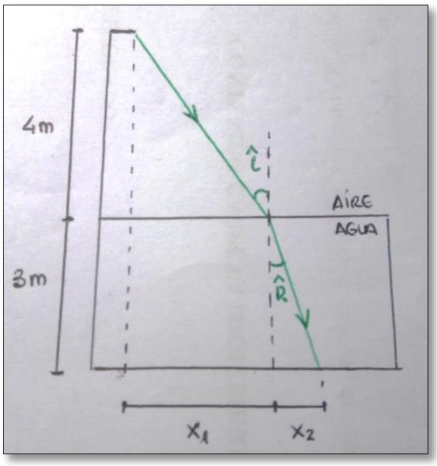
$$f = \frac{q \cdot B \cdot sen\ \varphi}{2\pi \cdot m} \rightarrow f = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19}) \cdot (5 \cdot 10^{-6}) \cdot sen\ 90°}{2\pi \cdot (9{,}1 \cdot 10^{-31})} = \boldsymbol{1{,}39 \cdot 10^5\ Hz}$$

4.

a)

Si miramos el dibujo adjunto a continuación observamos que la distancia pedida se puede calcular de la siguiente manera:

$$d = x_1 + x_2 = 4 \cdot tg\,\hat{\imath} + 3 \cdot tg\,\hat{R} \begin{cases} tg\,\hat{\imath} = \dfrac{x_1}{4} \rightarrow x_1 = 4 \cdot tg\,\hat{\imath} \\ tg\,\hat{R} = \dfrac{x_2}{3} \rightarrow x_2 = 3 \cdot tg\,\hat{R} \end{cases}$$



Según la segunda ley de la refracción:

$$n_i \cdot sen\,\hat{\imath} = n_R \cdot sen\,\hat{R} \begin{cases} \hat{\imath}: \acute{A}ngulo\ de\ incidencia\ del\ rayo \\ \hat{R}: \acute{A}ngulo\ de\ refracción\ del\ rayo \\ n_i: \acute{I}ndice\ de\ refracción\ del\ material\ donde\ incide\ el\ rayo \\ n_R: \acute{I}ndice\ de\ refracción\ del\ material\ donde\ emerge\ el\ rayo \end{cases}$$

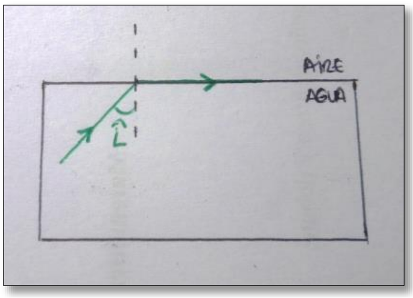
$$n_{aire} \cdot sen\,\hat{\imath} = n_{agua} \cdot sen\,\hat{R} \rightarrow sen\,\hat{R} = \frac{n_{aire} \cdot sen\,\hat{\imath}}{n_{agua}} = \frac{1 \cdot sen\,30°}{1{,}33} = 22{,}08°$$

Entonces la distancia buscada tendrá un valor de:

$$d = x_1 + x_2 = 4 \cdot tg\,\hat{\imath} + 3 \cdot tg\,\hat{R} = 4 \cdot tg\,30° + 3 \cdot tg\,22{,}08° = \mathbf{3{,}53\ m}$$

b)

A veces, cuando un rayo luminoso incide sobre una superficie con un ángulo determinado (ángulo límite), la luz no pasa al otro medio y se refleja en su totalidad (ángulo de refracción de 90^0). Este fenómeno es conocido por el nombre de reflexión total.



Para calcular el ángulo límite aplicamos la segunda ley de la refracción:

$$n_{agua} \cdot sen\,\hat{L} = n_{aire} \cdot sen\,\hat{R} \rightarrow 1{,}33 \cdot sen\,\hat{L} = 1 \cdot sen\,90° \rightarrow \hat{L} = sen^{-1}\left(\frac{1}{1{,}33}\right) = \mathbf{48{,}75}°$$

Conclusión: Cuando el ángulo de incidencia sea igual o mayor de $48{,}75^0$ se produce el fenómeno de reflexión total.

5.

a)

Sabemos que el carbono que hay en el trozo de madera del sarcófago tiene una edad de 3200 años, es decir, el periodo de del átomo ^{14}C de 3200 años. La vida media del ^{14}C o, con otras palabras, el tiempo que tarda un núcleo de ^{14}C en desintegrarse se calcula mediante la expresión:

$$\tau = 1/\lambda \ (años) \rightarrow \lambda: Constante\ de\ desintegración\ (años^{-1})$$

Para obtener el valor de la constante de desintegración recurrimos a la ecuación de decaimiento:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \begin{cases} \lambda: Constante\ de\ desintegración\ (años^{-1}) \\ t: Tiempo\ que\ tarda\ en\ desintegrarse\ la\ muestra\ (años) \\ N_0: Número\ de\ átomos\ iniciales \\ N: Número\ de\ átomos\ finales \end{cases}$$

Como el número de núcleos radioactivos ha disminuido un 32%, quedará un 68% de número de núcleos iniciales, es decir:

$$N = 0{,}68 \cdot N_0 \rightarrow N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow 0{,}68 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow 0{,}68 = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow -\lambda \cdot t = \ln 0{,}68$$

$$\lambda = -\frac{\ln 0{,}68}{t} = -\frac{\ln 0{,}68}{3200} = 1{,}21 \cdot 10^{-4}\ años^{-1}$$

Por lo que la vida media del carbono 14 será: $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1{,}21 \cdot 10^{-4}} = \mathbf{8297{,}4\ años}$

Su periodo de semidesintegración (tiempo necesario para que el número de núcleos radioactivos disminuya a la mitad) se calcula de la siguiente manera:

$$N = \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T_{\frac{1}{2}}} \rightarrow -\lambda \cdot T_{\frac{1}{2}} = Ln\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow T_{\frac{1}{2}} = -\frac{Ln\ 1 - Ln\ 2}{\lambda} = \frac{Ln\ 2}{\lambda}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{Ln\ 2}{\lambda} = \frac{Ln\ 2}{1{,}21 \cdot 10^{-4}} = \mathbf{5751{,}3\ años}$$

b)

La actividad que presenta una muestra de masa $m = 8\ \mu g = 8 \cdot 10^{-6}\ g$ de ^{14}C será:

$$A = \lambda \cdot N \rightarrow A = (3{,}82\ \cdot 10^{-12}) \cdot (3{,}44 \cdot 10^{17}) = \mathbf{1{,}31} \cdot \frac{\mathbf{10^6\ desintegraciones}}{\mathbf{s}} = \mathbf{1{,}31 \cdot 10^6\ Bq}$$

$$\mathrm{N} = m \cdot \frac{1\ mol}{M_C} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ núcleos}{1\ mol} = (8 \cdot 10^{-6}) \cdot \frac{1\ mol}{14\ g} \cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ n}{1\ mol} = 3{,}44 \cdot 10^{17}\ núcleos\ de\,^{14}C$$

$$\lambda = (1{,}21 \cdot 10^{-4}) \cdot \frac{1\ año}{365\ días} \cdot \frac{1\ día}{24h} \cdot \frac{1h}{3600s} = 3{,}82\ \cdot 10^{-12}\ s^{-1}$$