	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO **2015-2016** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	MODELO

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
Calificación: Las preguntas 1ª y 2ª se valorarán sobre 3 puntos; las preguntas 3ª y 4ª sobre 2 puntos.
Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & kz & = & 1\,, \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 3\,, \\ kx & + & 2y & - & z & = & 3\,, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores de k.
b) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $k = 2$.
c) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $k = 1$.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\,,$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
b) (0,5 puntos) Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.
c) (0,75 puntos) El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.
d) (1 punto) El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x + y - 2z = 1\,, \\ 2x + y - z = 2\,, \end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.
b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.
Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.
b) (1 punto) Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2\,d(Q, S)$.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0\,, \qquad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0\,,$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.
b) (1 punto) Hallar la distancia del punto $P(3,-1,2)$ al plano π_1.
c) (1 punto) Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x|\,, & \text{si } x < 1\,, \\ x\,e^{1-x}\,, & \text{si } x \geq 1\,, \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.
b) (0,5 puntos) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.
c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.
b) (1 punto) Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.
a) Por la obtención de los valores críticos $k = 1/2$, $k = 1$: 0,5 puntos repartidos en: planteamiento, 0,25 puntos; resolución, 0,25 puntos. Por la discusión de cada uno de los tres casos $[k = 1/2]$, $[k = 1]$, $[k \neq 1/2, k \neq 1]$: 0,5 puntos, repartidos en: planteamiento, 0,25 puntos; resolución, 0,25 puntos.
b) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
c) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.

Ejercicio 2.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
b) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
c) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
d) Por saber cuál es la integral que se debe calcular, 0,25 puntos. Por el cálculo de la primitiva, 0,5 puntos. Regla de Barrow, 0,25 puntos.

Ejercicio 3.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 4.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
c) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 2.
a) Por el estudio de la continuidad, 0,5 puntos repartidos en: planteamiento, 0,25 puntos; resolución, 0,25 puntos. Por el estudio de la derivabilidad, 0,5 puntos repartidos en: planteamiento, 0,25 puntos; resolución, 0,25 puntos. Por el cálculo de la derivada, 0,5 puntos repartidos en: planteamiento, 0,25 puntos; resolución, 0,25 puntos.
b) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.
c) Por plantear la integral que hay que calcular, 0,25 puntos. Por el cálculo de la primitiva, 0,5 puntos. Por la aplicación de la regla de Barrow, 0,25 puntos.

Ejercicio 3.
a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.
b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 4.
Por plantear que $X = A^{-1}BA^t$, 1 punto. Por el cálculo de A^{-1}, 0,5 puntos, repartidos en: planteamiento, 0,25 puntos; resolución, 0,25 puntos. Por el cálculo de X, 0,5 puntos, repartidos en: planteamiento, 0,25 puntos; resolución, 0,25 puntos.

MATEMATICAS II

SOLUCIONES

Opción A

Ejercicio 1

a) Sea A la matriz de coeficientes y A^* la matriz ampliada.

Se tiene $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 4 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4k^2 + 6k - 2$, que se anula para $k = 1$ y $k = 1/2$.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 1/2$, es rango(A) = rango$(A^*) = 3$ y el sistema es compatible y determinado.

Para $k = 1$, es rango(A) = rango$(A^*) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Si $k = 1/2$, es rango$(A) = 2$, rango$(A^*) = 3$ y el sistema es incompatible

b) Para $k = 2$ el sistema tiene como única solución $x = 1$, $y = 1/3$, $z = -1/3$.

c) Si $k = 1$ el sistema es equivalente a $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1\,, \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 3\,, \end{array} \right.$ y su solución es

$$\{x = \lambda,\ y = 1 - \lambda/2,\ z = -1,\ \text{con } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Ejercicio 2

a) La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 4x - x^2$, que se anula en $x = 0$ y en $x = 4$.

Si $x \in (-\infty, 0)$ es $f'(x) < 0$, luego f es decreciente en $(-\infty, 0)$.

Si $x \in (0, 4)$ es $f'(x) > 0$ y f es creciente en $(0, 4)$.

Si $x \in (4, \infty)$ es $f'(x) < 0$ y f es decreciente en $(4, \infty)$.

b) La función f tiene puntos críticos en $x = 0$ y en $x = 4$. Como $f''(x) = 4 - 2x$, $f''(0) > 0$ y $f''(4) < 0$. Por lo tanto hay un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(4, 32/3)$.

c) Hay que optimizar la función $g(a)$, que expresa la pendiente de f en $x = a$. Por tanto $g(a) = f'(a) = 4a - a^2$, cuya derivada $(g'(a) = 4 - 2a)$ se anula en $a = 2$. Además en este punto se alcanza el máximo absoluto. Por tanto el valor máximo que puede tener la pendiente de una tangente a la curva $y = f(x)$ es $g(2) = 4$.

d) La curva $y = f(x)$ corta al eje OX cuando $f(x) = 0$, es decir en $x = 0$ y en $x = 6$. El volumen del cuerpo de revolución será por tanto:

$$V = \int_0^6 \pi \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^7}{63} + \frac{4}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^6\right]_0^6 = \pi \frac{10368}{35} u^3$$

Ejercicio 3

a) El plano pedido está determinado por el punto P y los vectores $\overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1)$ y $\overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -1)$.

Luego su ecuación implícita es $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Es decir $3x + y - 3 = 0$.

b) Se puede tomar como vector director de la recta el vector el vector normal al plano π, $\overrightarrow{n} = (1, 2, -1)$ y la ecuación de la recta en forma continua es $x - 2 = \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Ejercicio 4

a) Los puntos $R(x, y, z)$ equidistantes de P y Q satisfacen

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

Simplificando se obtiene el plano mediador $2x + 4z - 9 = 0$.

b) La recta que pasa por P y Q es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Por tanto los puntos $S(x, y, z)$ de esta recta que verifican $d(P, S) = 2d(Q, S)$, deben satisfacer $\sqrt{t^2 + (2t)^2} = 2\sqrt{(1+t)^2 + (2+2t)^2}$, lo que se verifica para $t = -2$ y para $t = -2/3$, que corresponden a los puntos $S_1(-1, 1, -1)$ y $S_2(1/3, 1, 5/3)$

Opción B

Ejercicio 1

a) El vector pedido debe ser ortogonal a los vectores normales de los dos planos dados. El producto vectorial de estos dos vectores es: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = |(3,4,-5) \times (1,-2,1) = (-6,-8,-10)$. Como $|\overrightarrow{v}| = 2\sqrt{50}$, un vector unitario paralelo a ambos planos es $\pm\left(\dfrac{3}{\sqrt{50}}, \dfrac{4}{\sqrt{50}}, \dfrac{5}{\sqrt{50}}\right)$

b) $d(P,\pi_1) = \dfrac{|3\cdot 3 + 4\cdot(-1) - 5\cdot 2 - 7|}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}} = \dfrac{6}{5}\sqrt{2}$

c) El coseno del ángulo que forman los dos planos es $\cos(\widehat{\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}}) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ejercicio 2

a) Se puede escribir $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x\,e^{1-x} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$. Además $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ (1-x)\,e^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

La función es claramente continua y derivable en todo x distinto de 0 y de 1, porque lo son las funciones polinímicas y exponenciales.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 = f(0)$, f es continua en $x=0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = -1$, f no es derivable en $x=0$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x\,e^{1-x} = 1 = f(1)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$, f es continua en $x=1$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 1$, f no es derivable en $x=1$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} x\,e^{1-x}\,dx = \left[-(x+1)\,e^{1-x}\right]_1^2 = 2 - \frac{3}{e}.$

Ejercicio 3

a) $M - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$. Por tanto $\det(M-\lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9$, que se anula si $\lambda = -1$ o $\lambda = 3$.

b) Se trata de resolver el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, que es equivalente a $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$, cuya solución es $\{x = \mu, y = -\mu, z = 0, \text{ con } \mu \in \mathbb{R}\}$.

Ejercicio 4

a) Despejando en la ecuación matricial se obtiene $X = A^{-1}BA^t$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 13 & 6 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

DOCUMENTO DE
Principales contenidos que se tendrán en cuenta en la elaboración de las Pruebas de Acceso a las Enseñanzas universitarias de Grado

Matemáticas II. Curso 2015/2016

De acuerdo con el Decreto 67/2008, de 19 de junio, por el que se establece el currículo del Bachillerato para la Comunidad de Madrid, publicado en el B.O.C.M. con fecha 27 de junio de 2008, para elaborar las Pruebas de Acceso a la Universidad se tendrán en cuenta los siguientes contenidos:

ANÁLISIS.

- Límite de una función en un punto. Límites laterales. Cálculo de límites. Indeterminaciones sencillas. Infinitésimos equivalentes.
- Funciones continuas. Operaciones algebraicas con funciones continuas. Composición de funciones continuas. Teoremas de Bolzano y de los valores intermedios. Teorema de acotación en intervalos cerrados y acotados. Tipos de discontinuidad.
- Derivada de una función en un punto. Interpretaciones (analítica, geométrica, física). Derivadas laterales. Relación con la continuidad. Reglas de derivación (incluyendo la regla de la cadena, la derivación logarítmica, y las fórmulas de las derivadas de las funciones arcoseno y arcotangente). Derivadas iteradas.
- Aplicaciones de la derivada. Monotonía y convexidad. Determinación de los puntos notables de funciones. Representación gráfica.
- Planteamiento y resolución de problemas de máximos y mínimos.
- Conocimiento y aplicación de los resultados del Teorema de Rolle, el Teorema del Valor Medio y la regla de L'Hôpital.
- Primitiva de una función. Cálculo de primitivas inmediatas y de funciones que son derivadas de una función compuesta. Integración por partes. Integración mediante cambio de variables (ejemplos simples). Integración de funciones racionales (con denominador de grado no mayor que dos).
- El problema del área. Introducción al concepto de integral definida de una función a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. La regla de Barrow. La integral definida como suma de elementos diferenciales: Aplicaciones al cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.

ÁLGEBRA LINEAL.

- Las matrices como herramientas para representar datos estructurados en tablas y grafos. Traspuesta de una matriz. Suma de matrices. Producto de un número real por una matriz. Producto de matrices. Potencias de una matriz cuadrada. Propiedades de las operaciones con matrices. *(Se pretende que el estudiante sea capaz de realizar con corrección manipulaciones algebraicas con matrices, aunque no se exigirá la demostración de las propiedades).*
- Determinantes. Definición y propiedades. Cálculo de determinantes de orden dos y tres, utilizando la regla de Sarrus. Propiedades elementales de los determinantes. Aplicación al desarrollo de determinantes de orden superior. *(No se exigirá la demostración de las propiedades).*
- Matrices inversas. Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada de orden no superior a tres. Estudio de la inversa de una matriz dependiente de un parámetro. Ecuaciones matriciales.
- Rango de una matriz. Estudio del rango de una matriz que depende como máximo de un parámetro.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Representación en forma matricial. Resolución de sistemas compatibles. Discusión de las soluciones de sistemas lineales dependientes de parámetros. Sistemas homogéneos. *(Los sistemas lineales tendrán como máximo cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas y dependerán a lo sumo de un parámetro).*
- Planteamiento y resolución de problemas cuya solución puede obtenerse a partir de un sistema lineal de, como máximo, tres ecuaciones con tres incógnitas.

GEOMETRÍA

- Vectores. Operaciones con vectores. Dependencia e independencia lineal. Bases. Coordenadas.
- Producto escalar: definición, propiedades e interpretación geométrica. Vectores unitarios, ortogonales y ortonormales. Módulo. Ángulo entre dos vectores. Proyección de un vector sobre otro.
- Producto vectorial: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Producto mixto de tres vectores: definición, propiedades e interpretación geométrica.
- Ecuaciones de rectas en el espacio. Ecuaciones de planos. Posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio. Distancia entre

puntos, rectas y planos. Haces de planos. Perpendicular común a dos rectas. Ángulos entre rectas y planos.

- Áreas de paralelogramos y triángulos. Volúmenes de prismas y tetraedros.
- Ecuación de la superficie esférica. Resolución de problemas.

Madrid, 1 de julio de 2015