Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Ejercicios de Repaso

ÍNDICE

BLOQUE 1: ÁLGEBRA Y PROGRAMACIÓN LINEAL

BLOQUE 2: ANÁLISIS

BLOQUE 3: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

ANEXO

BLOQUE 1 ÁLGEBRA Y PROGRAMACIÓN LINEAL

Año 2009

Junio, Opción A:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x+y+kz=4 \\ 2x-y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.
b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k=0$.

Junio, Opción B:

Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de petróleo de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de petróleo de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Septiembre, Opción A:

Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere 0, 3 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 4 euros. Cada m2 de panel del tipo B requiere 0,2 horas de trabajo para su fabricación y 0,2 horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas en el taller de fabricación y de 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo

Septiembre, Opción B:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} \mathrm{x+y+z} = 3 \\ \mathrm{x+ky+z} = 3 \\ \mathrm{kx} - \mathrm{3z} = 6 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Año 2010

Junio, Opción A:

Se considera la función $f(x,y) = -0,4x + 3,2y$

sujeta a las restricciones: $\begin{cases} x + y \leq 7 \\ x + 4y \geq 4 \\ x + 5 \geq y \\ 0 \leq x \leq 5, y \geq 0 \end{cases}$

a) Represéntese la región S del plano determinada por el conjunto de restricciones.
b) Calcúlense los puntos de la región S donde la función f alcanza sus valores máximo y mínimo.
c) Calcúlense dichos valores máximo y mínimo

Junio, Opción B:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ 2x - ky + z = 2 \\ x - y - z = k - 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.
b) Resuélvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Septiembre, Opción A:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro a.
b) Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $a = 0$.

Septiembre, Opción B:

Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de $480m^2$. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de $6m^2$ por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de $8m^2$ por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg de pintura y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

Año 2011

Junio, Opción A:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ ay + z = 1 \\ ax + y + az = a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $a = 3$.

Junio, Opción B:

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de k para los cuales la matriz A no es invertible.
b) Para $k = 0$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}
c) Para $k = 0$, resuélvase la ecuación matricial $AX = B$

Septiembre, Opción A:

Se considera la región S acotada plana definida por las cinco condiciones siguientes:

$$x + 2y \leq 4; x - 2y \leq 4; 2x - 3y \geq -6; 2x + 3y \geq -6; x \leq 2$$

a) Dibújese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices
b) Calcúlense los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S y especifíquense los puntos de S en los cuales se alcanzan los mismos.

Septiembre, Opción B:

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense a, b para que se cumpla la igualdad $AB = BA$.
b) Calcúlense c, d para que se cumpla la igualdad $A^2 + cA + dI = O$
c) Calcúlense todas las soluciones del sistema lineal:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Año 2012

Junio, Opción A:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay - 7z = 4a - 1 \\ x + (1+a)y - (a+6)z = 3a + 1 \\ ay - 6z = 3a - 2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $a = -3$.

Junio, Opción B:

Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

- No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.
- Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no lo son.
- Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Septiembre, Opción A:

Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de $3m^2$ por litro, con un coste de 1€ por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de $4m^2$ por litro, con un coste de 1,2€ por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480€ y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura.

Determínese la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.

Septiembre, Opción B:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ky + 2z = 5 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema para $k = 0$.
c) Resuélvase el sistema para $k = 2$.

Año 2013

Junio, Opción A:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese A^{-1}.
b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por:

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se desea maximizar la función $f(x, y) = 64'8x + 76{,}5y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$6x + 5y \leq 700; 2x + 3y \leq 300; x \geq 0; y \geq 0$$

a) Represéntese gráficamente la región de soluciones factibles y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Determínese el valor máximo de f sobre la región, e indíquese el valor del mismo.

Junio, Opción B:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax - 2y = 2 \\ 3x - y - z = -1 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema para $a = 1$.

Septiembre, Opción A:

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense la matriz inversa de A.
b) Resuélvase la ecuación matricial $AX = B - I$

Sea C la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntese la región C y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Determínese el punto de C donde la función $f(x, y) = 3x + y$ alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.

Septiembre, Opción B:

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky - 2z = 1 \\ kx - 3y + kz = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema para $k = 1$.

Año 2014

Junio, Opción A:

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense la matriz $(A^t B)^{-1}$

b) Resuélvase la ecuación matricial $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Se consideran la función $f(x, y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x - 2y \leq 0; x + y \leq 6; \; x \geq 0; \; y \leq 3$$

a) Represéntese la región S.
b) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región S y obténganse los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

Junio, Opción B:

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema para $a = -1$.

Septiembre, Opción A:

Considérese el siguiente lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real "λ":

$$\begin{cases} 2x - \lambda y - z = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z = \lambda - 3 \end{cases}$$

a) Determínense los valores del parámetro real "λ" que hacen que el sistema sea incompatible.
b) Resuélvase el sistema para $\lambda = 1$.

Septiembre, Opción B:

Considérese la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $(AA^t)^{200}$
b) Calcúlese $(AA^t - 3I)^{-1}$

Sea S la región del plano definida por:

$$y \geq 2x - 4; y \leq x - 1; 2y \geq x; x \geq 0; y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x - 3y$ en S indicando los puntos donde se alcanzan los mismos.

Año 2015

Junio, Opción A:

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema para $a = 1$.

Junio, Opción B:

Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la del tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, ¿cuál es la producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo? Calcúlese dicho coste diario mínimo.

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

a) Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.
b) Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

Julio, Opción A:

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.
b) Calcúlese el determinante de la matriz $(BA^tB^{-1} - 2I)^3$

Un distribuidor de aceite acude a una almazara para comprar dos tipos de aceite, A y B. La cantidad máxima que puede comprar es de 12.000 litros en total. El aceite de tipo A cuesta 3 euros/litro y el de tipo B cuesta 2 euros/litro. Necesita adquirir al menos 2.000 litros de cada tipo de aceite. Por otra parte, el coste total por compra de aceite no debe ser superior a 30.000 euros. El beneficio que se conseguirá con la venta del aceite será de un 25 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo A y de un 30 % sobre el precio que ha pagado por el aceite de tipo B. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite se deberían adquirir para maximizar el beneficio? Obténgase el valor del beneficio máximo.

Julio, Opción B:

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ z + ay + az = a \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema para $a = 2$

BLOQUE 2
ANÁLISIS

Año 2009

Junio, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

a) Determínense los extremos relativos de f.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.
c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Junio, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - a}$$

a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.
b) Para $a = -1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_0^b f(x)dx = 0$.

Septiembre, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} 2x + 24 \; si \; x \leq -3 \\ x^2 + 9 \; si -3 < x \leq 2 \\ -x + 15 \; si \; x > 2 \end{cases}$$

a) Represéntese gráficamente la función f.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

Septiembre, Opción B:

El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.

a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.
b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.
c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pérdidas (es decir, beneficio negativo).

Año 2010

Junio, Opción A:

Se considera el rectángulo (R) de vértices $BOAC$ con $B(O,b), 0(0,0), A(a,O), C(a,b), a > 0, b > 0$, y cuyo vértice C está situado en la parábola de ecuación $y = -x^2 + 12$.

a) Para $a = 3$, determínense las coordenadas de los vértices de (R) y calcúlese el área de (R).
b) Determínense las coordenadas de los vértices de (R) de manera que el área de (R) sea máxima.
c) Calcúlese el valor de dicha área máxima.

Junio, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} x + 4 \; six < 0 \\ 4 - x^2 \; si \; 0 \leq x \leq 2 \\ ax + b \; si \; x > 2 \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b, para que la función f sea continua y derivable en $x = 2$.
b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x = 1$.
c) Para $a = 1, b = -2$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f y el eje OX.

Septiembre, Opción A:

El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m2. Calcúlense sus dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

Septiembre, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} 2x^2 - a \; si \; x \leq -1 \\ -3x^2 + b \; si - 1 < x < 1 \\ \ln(x + a) \; si \; x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b, para que la función f sea continua en todos los puntos.
b) Para $a = 0, b = 3$, represéntese gráficamente la función f.
c) Para $a = 0, b = 3$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Año 2011

Junio, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2}$$

a) Especifíquese su dominio de definición y los puntos de corte con la gráfica de f con los ejes coordenados. Determínense las asíntotas de f.
b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 1$.
c) Calcúlese la integral definida $\int_2^3 f(x)dx$.

Junio, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} \; si\; x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - b}{4} \; si\; x > -1 \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b, para que la función f sea continua y derivable en $x = -1$.
b) Para $a = 1, b = 3$, represéntese gráficamente la función f.
c) Calcúlese el valor de b para que $\int_0^3 f(x)dx = 6$.

Septiembre, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.
b) Represéntese gráficamente la función f.
c) Calcúlese el área del recinto plano acotado por la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Septiembre, Opción B:

Se considera el rectángulo R de lados x, y.

a) Si el perímetro de R es igual a $12m$, calcúlense x, y para que el área de R sea máxima y calcúlese el valor de dicha área máxima.
b) Si el área de R es igual a $36m^2$, calcúlense x, y para que el perímetro de R sea mínimo y calcúlese el valor de dicho perímetro mínimo.

Año 2012

Junio, Opción A:

Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

Junio, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \; si \; x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 \; si \; x > 1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f.
b) Represéntese gráficamente la función f.
c) Calcúlese el área del recinto plano acotado por f, el eje OX, y la recta $x = 2$.

Septiembre, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.
b) Represéntese gráficamente la función f.
c) Calcúlese $\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2} dx$

Septiembre, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b \; si \; x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 \; si \; x > 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense los valores de a y b para los que la función f es continua y derivable.
b) Para $a = 0$ y $b = 1$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en los puntos en los que dicha tangente es paralela a la recta $y - 8x = 1$.
c) Sea g la función real de variable real definida por $g(x) = 1 - 2x^2$. Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de f y g.

Año 2013

Junio, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 3e^{-2x}$.

a) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 0$.
b) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$, $x = 0'5$ y el eje de abscisas.

Junio, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \; si \; x < 0 \\ \dfrac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f en $x = 0$ para los distintos valores del parámetro a.
b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
c) Determínense los intervalos de concavidad y convexidad de f.

Septiembre, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2-9}$.

a) Hállense las asíntotas de
b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 1$.

Septiembre, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

a) Determínense los extremos relativos de f.
b) Calcúlese la integral definida $\int_0^1 f(x)dx$.

Año 2014

Junio, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$\begin{cases} x + a \; si \; x < 1 \\ x^2 - 2 \; si \; 1 \leq x \leq 3 \\ x + b \; si \; x > 3 \end{cases}$$

a) Determínense ay b, para que f sea continua en todos los números reales.
b) Calcúlese $\int_1^3 f(x)dx$.

Junio, Opción B:

Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$.

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica f en el punto $x = 1$.
b) Calcúlese $\int_2^3 f(x)dx$

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

a) Determínense las asíntotas.
b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Septiembre, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-2)}$$

c) Determínense las asíntotas de f.
d) Estúdiese si la función es creciente o decreciente en un entorno de $x = 4$.

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2e^{x+1}$.

c) Esbócese la gráfica de la función f.
d) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f, las rectas $x = 0$, $x = 1$ y el eje de abscisas.

Septiembre, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{\lambda x}{4 + x^2}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real λ para que la recta tangente ala gráfica de f en $x = 1$ sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

b) Calcúlese $\int_0^2 f(x)dx$ para $\lambda = 1$.

Año 2015

Junio, Opción A:

Sabiendo que la derivada de la función real de variable real f es:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

a) Calcúlese la expresión de $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,4).
b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (1,4).

Sean las funciones reales de variable real:

$$f(x) = x2 - 6x; \; g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.
b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

Junio, Opción B:

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \; si \; x < 2 \\ 3x + m \; si \; x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real m para que la función sea continua en $x = 2$.
b) Calcúlense $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Julio, Opción A:

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2, a \in R$.
a) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en x = 1/2. Compruébese que se trata de un mínimo.
b) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Julio, Opción B:

Se considera la función real de variable real f$(x) = -8x^2 + 24x - 10$

a) Calcúlense los máximos y mínimos locales de f y represéntese gráficamente la función.
b) Determínese el área del recinto cerrado comprendido entre la gráfica de la función f y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}\ si\ x<0 \\ \dfrac{x^{3}}{(x-2)^{2}}+1\ si\ x\geq 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de la función.
b) Determínense las asíntotas de esta función.

BLOQUE 3
ESTADÍSTICA Y PROBABILIAD

Año 2009

Junio, Opción A:

Se consideran tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = \frac{1}{2};\ P(B) = \frac{1}{3};\ P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3}; P(A \cap B \cap C) = 0;\ P(A|B) = P(C|A) = \frac{1}{2}$$

a) Calcúlese $P(C \cap B)$.
b) Calcúlese $P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$.

Nota: La notación $\bar{A}$ representa al suceso complementario de A.

Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.

a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95%? Razónese la respuesta.
b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

Junio, Opción B:

Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y SO bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul e igual a 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.
b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.

Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros):

9,1	4,9	7,3	2,8	5,5	6,0	3,7	8,6	4,5	7,6

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%.
b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 95%.

Septiembre, Opción A:

En un cierto banco el 30% de los créditos concedidos son para vivienda, el 50% se destinan a empresas y el 20% son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10% resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20% y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10%.

a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95%.

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la Inedia muestral.
b)) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

Septiembre, Opción B:

La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:

a) al menos uno de los dos tipos de música.
b) la música clásica y también la música moderna.
c) sólo la música clásica.
d) sólo la música moderna.

Se supone que la estancia (en días) de un paciente en un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95% para la estancia media de un paciente en dicho hospital.
b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?

Año 2010

Junio, Opción A:

Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz, otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza.

a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento.
b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?

Se supone que el peso en kilos de los rollos de cable eléctrico producidos por una cierta empresa, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5kg. Una muestra aleatoria simple de 9 rollos ha dado un peso medio de 10,3kg.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de los rollos de cable que produce dicha empresa.
b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,2kg, con probabilidad igual a 0,98?

Junio, Opción B:

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}2$ y $P(B) = 0{,}4$.

a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determínese $P(A \cap B)$. ¿Son además A y B independientes? Razónese.
b) Si A y B son independientes, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razónese.
c) Si $P(A|B) = 0$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¡Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónese.
d) Si $A \subset B$, calcúlese P(A n B). ¿Son A y B independientes? Razónese.

Se supone que el precio de un kilo de patatas en una cierta región se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica Igual a 10 céntimos de euro. Una muestra aleatoria simple de tamaño 256 proporciona un precio medio del kilo de patatas igual a 19 céntimos de euro.

a) Determínese un intervalo de confianza del 95% para el precio medio de un kilo de patatas en la región.
b) Se desea aumentar el nivel de confianza al 99% sin aumentar el error de la estimación. ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse?

Septiembre, Opción A:

Se consideran tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A|C) \geq P(B|C), P(A|\bar{C}) \geq P(B|\bar{C}).$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta:

a) $P(A) < P(B)$
b) $P(A) \geq P(B)$

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se torna una muestra aleatoria simple de 36 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.
b) Determínese un intervalo de confianza del 95% para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

Septiembre, Opción B:

Se consideran los siguientes sucesos:

- Suceso A: La economía de un cierto país está en recesión.
- Suceso B: Un indicador económico muestro que la economía de dicho país está en recesión.

Se sabe que $P(A) = 0{,}005;\ P(B|A) = 0{,}95;\ P(\bar{B}|\bar{A}) = O,96$

a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.
b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Año 2011

Junio, Opción A:

En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0,4, de molinos eólicos con probabilidad 0,26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0,12. Elegido un día al azar, calcúlese la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio:

a) Por alguna de las dos instalaciones.
b) Solamente por una de las dos.

Se supone que el tiempo medio diario dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 5 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver TV es de 3 horas.

a) Determínese un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del 95
b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de μ sea menor o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90 %?

Junio, Opción B:

En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0.5, de que sea un camión es 0.3 y de que sea una motocicleta es 0.2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0.06 para un coche, 0.02 para un camión y 0.12 para una motocicleta. En un momento dado un vehículo pasa por el radar.

a) Calcúlese la probabilidad de que este vehículo supere la máxima velocidad permitida.
b) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta?

Se supone que el precio (en euros) de un refresco se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,09 euros. Se toma una muestra aleatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resulta:

1,50	1,60	1,10	0,90	1,00	1,60	1,40	0,90	1,30	1,20

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95% para μ
b) Calcúlese el tamaño mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea menor o igual que 0,10 euros con probabilidad mayor o igual que 0,99

Septiembre, Opción A:

Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0,49 y la probabilidad de que nazca niño es 0,51. Una familia tiene dos hijos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?

Se supone que la presión diastólica en una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 98 mm y desviación típica 15 mm. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 9.

a) Calcúlese la probabilidad de que la media muestral sea mayor que 100 mm.
b) Si se sabe que la media muestral es mayor que 100 mm, ¿cuál es la probabilidad de que sea también menor que 104 mm?

Septiembre, Opción B:

Se dispone de tres urnas A, B, C. La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra, y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1,2 o 3 se escoge la urna A, si sale 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se escoge la urna C. A continuación, se extrae una bola de la urna elegida.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?
b) Si se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C?

Para determinar el coeficiente de inteligencia θ de una persona se la hace contestar un conjunto de tests y se obtiene la media de sus puntuaciones. Se supone que la calificación de cada test se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media θ y desviación típica 10.

a) Para una muestra aleatoria simple de 9 tests, se ha obtenido una media muestral igual a 110. Determínese un intervalo de confianza para θ al 95%.
b) ¿Cuál es el número mínimo de tests que debería realizar una persona para que el valor absoluto del error en la estimación de su coeficiente de inteligencia sea menor o igual que 5, con el mismo nivel de confianza?

Año 2012

Junio, Opción A:

En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?
b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día del curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

26	27,5	31	18	25,5	30,5	32	31,5

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97 %.

Junio, Opción B:

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \cap B) = 0{,}1;\ P(A \cap B) = 0{,}6;\ P(A|B) = 0{,}5$$

Calcúlense:
a) $P(B)$
b) $P(A \cup B)$
c) $P(A)$
d) $P(\bar{B}|\bar{A})$

Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(251'6;\ 271'2)$ para μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90%.

Septiembre, Opción A:

Se dispone de cinco cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

a) Calcúlese la probabilidad de que el jugador gane.
b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90% para μ.
b) Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Septiembre, Opción B:

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = \frac{1}{3};\ P(B|A) = \frac{1}{4};\ P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Calcúlense:

a) $P(A \cap B)$
b) $P(B)$
c) $P(\bar{B}|A)$
d) $P(\bar{B}|\bar{A})$

Año 2013

Junio, Opción A:

Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar:

a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector.
b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista

El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por el grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3,5 Mb y desviación típica igual a 1,4 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 3,37Mb?
b) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor de 3,42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95% para la media de la población.

Junio, Opción B:

Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.
b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

La duración en horas de un determinado tipo de bombilla se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 1940 h. Se toma una muestra aleatoria simple.

a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada X de esas bombillas sea inferior a 100 h?
b) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada X es de 12415 h, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ.

Septiembre, Opción A:

En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.
b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0,4 años.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1,75 años. Determínese un intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0,02 años con un nivel de confianza del 90%.

Septiembre, Opción B:

Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa.
b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos.

a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22.
b) Determínese un intervalo de confianza del 99 % para μ, si la media muestral es igual a 1532.

Año 2014

Junio, Opción A:

Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral tales que:

$$P(A) = 0{,}4;\ P(A \cup B) = 0{,}5;\ P(B|A) = 0{,}5$$

Calcúlense:

a) $P(B)$
b) $P(A|B)$

La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3mm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36mm. Determínese un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95%.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90%.

Junio, Opción B:

Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?
b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza $(16'33;\ 19'27)$ para estimar μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95%.

Septiembre, Opción A:

En la representación de navidad de los alumnos de 3º de primaria de un colegio hay tres tipos de papeles: 7 son de animales, 3 de personas y 12 de árboles. Los papeles se asignan al azar, los alumnos escogen por orden alfabético sobres cerrados en los que está escrito el papel que les ha correspondido.

a) Calcúlese la probabilidad de que a los dos primeros alumnos les toque el mismo tipo de papel.
b) Calcúlese la probabilidad de que el primer papel de persona le toque al tercer alumno de la lista.

La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral de 169 cm. Hállese un intervalo de confianza al 98% para μ.
b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4cm, con un nivel de confianza del 90%?

Septiembre, Opción B:

Al 80% de los trabajadores en educación (E) que se jubilan sus compañeros les hacen una fiesta de despedida (FD), también al 60 % de los trabajadores de justicia (J) y al 30 % de los de sanidad (S). En el último año se jubilaron el mismo número de trabajadores en educación que en sanidad, y el doble en educación que en justicia.

a) Calcúlese la probabilidad de que a un trabajador de estos sectores, que se jubiló, le hicieran una fiesta.
b) Sabemos que a un trabajador jubilado elegido al azar de entre estos sectores, no le hicieron fiesta. Calcúlese la probabilidad de que fuera de sanidad.

El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 3,290 y un nivel de confianza del 90%, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95% y el error máximo fuera de 7, 840.
Exprésense los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muestrales respectivos.

Año 2015

Junio, Opción A:

En una bolsa hay cuatro bolas rojas y una verde. Se extraen de forma consecutiva y sin reemplazamiento dos bolas. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean del mismo color.
b) La primera bola haya sido verde si la segunda bola extraída es roja.

El tiempo de reacción ante un obstáculo imprevisto de los conductores de automóviles de un país, en milisegundos (ms), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica σ = 250 ms.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza $(701;\, 799)$, expresado en ms, para μ con un nivel del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 80%.

Junio, Opción B:

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \cap B) = 0,3;\ P(A \cap B) = 0,2\ y\ P(B) = 0,7$$

Calcúlese:

a) $P(A \cup B)$
b) $P(B|A)$

La duración de cierto componente electrónico, en horas (h), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 1000 h.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de esos componentes electrónicos de tamaño 81 y la media muestral de su duración ha sido x = 8000 h. Calcúlese un intervalo de confianza al 99% para μ.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 7904 y 8296 horas para una muestra aleatoria simple de tamaño 100 si sabemos que μ=8100 h?

Julio, Opción A:

Se consideran los sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,09;\ P(B) = 0,07\ y\ P(A \cup B) = 0,97$$

Además los sucesos A y C son incompatibles.

a) Estúdiese si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcúlese $P(A \cap B \mid C)$.

La cantidad de fruta, medida en gramos, que contienen los botes de mermelada de una cooperativa con producción artesanal se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica de 10 gramos.

a) Se seleccionó una muestra aleatoria simple de 100 botes de mermelada, y la cantidad total de fruta que contenían fue de 16.000 gramos. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la media μ.
b) A partir de una muestra aleatoria simple de 64 botes de mermelada se ha obtenido un intervalo de confianza para la media μ con un error de estimación de 2,35 gramos. Determínese el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Julio, Opción B:

La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es 3/4. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.
b) Si se eligen tres trabajadores al azar, al menos uno de ellos llegue puntual. Asuma que la puntualidad de cada uno de ellos es independiente de la del resto.

En cierta región, el gasto familiar realizado en gas natural, medido en euros, durante un mes determinado se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

a) Determínese el mínimo tamaño muestral necesario para que al estimar la media del gasto familiar en gas natural, μ, mediante un intervalo de confianza al 95 %, el error máximo cometido sea inferior a 15 euros.
b) Si la media del gasto familiar en gas natural, μ, es de 250 euros y se toma una muestra aleatoria simple de 81 familias, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral, X, sea superior a 230 euros?

ANEXO

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

El valor de la tabla para z
es el área bajo la curva
de la normal estándar
a la izquierda de z

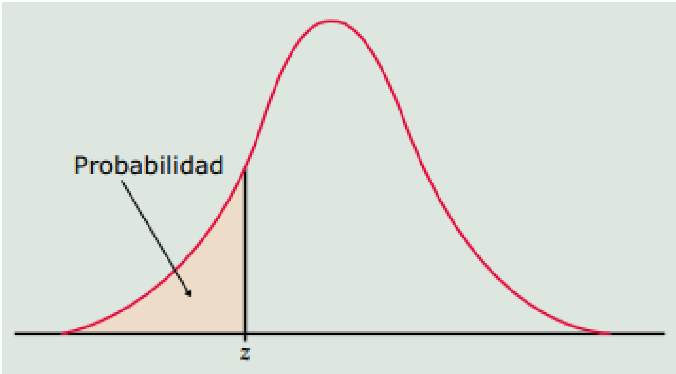

TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

TABLA COMLEMENTARIA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

El valor de la tabla para z es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de z

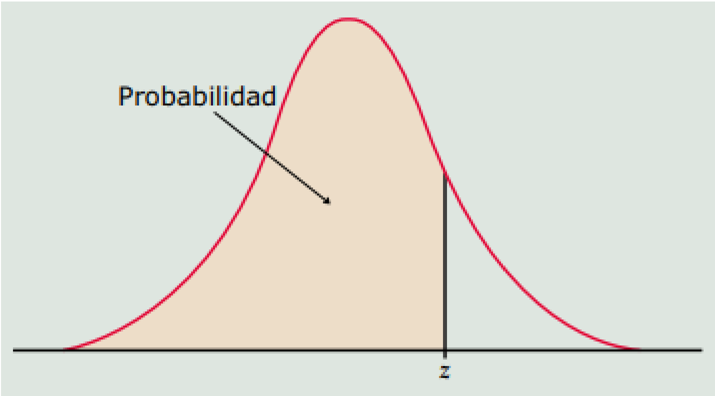

TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998