A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real *m*:

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de *m*.
b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = \frac{1}{2}$

a)
Para discutir el sistema en función de los valores de *m*, hay que estudiar el rango de la matriz A y el rango de la matriz ampliada (A^*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Se calcula el determinante de A y se iguala a 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2m^2 + m - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{2}; m = -1$$

Para $m \neq \frac{1}{2}$ y $m \neq -1$, el rango de la matriz A es 3. El rango de A^* también es 3 ya que esta contiene a A. Luego, para estos valores de m, según el teorema de Rouche-Frobenius, el sistema es compatible determinado.
Para $m = \frac{1}{2}$ y $m = -1$, el rango de la matriz A es 2 ya que existe un determinante de orden 2 distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Ahora, hay que comprobar cuál es el rango de la matriz ampliada. Si se sustituye $m = \frac{1}{2}$ en A^*, no se encuentra ningún determinante de orden 3 distinto de 0, luego el rango de A^* es 2 para ese valor. Si se sustituye $m = -1$ en A^*, no se encuentra ningún determinante de orden 3 distinto de 0, luego el rango de A^* es 2 para ese valor.
Para $m = \frac{1}{2}$ y $m = -1$, el rango de A es 2, al igual que el rango de A^*. Como el sistema tiene 3 incógnitas, para estos valores de m, según el teorema de Rouche-Frobenius, el sistema en compatible indeterminado.

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

b)

Resolviendo por el método de Gauss, se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{Sol: } \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\lambda \\ -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de f(x) en x = 0.
b) (0.5 puntos) Estudie si f(x) presenta algún tipo de simetría par o impar.
c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}$

a)

Continuidad:

El dominio de la función $x^3 e^{-1/x^2}$ es $\mathbb{R}$, función que es continua en todo su dominio. Hay que estudiar la continuidad en el punto de cambio de la función, que es x=0.

$$\lim_{x\to 0} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$f(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to f(x) \text{ es continua en x=0}$$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad

La función $x^3 e^{-1/x^2}$ es derivable en $\mathbb{R}$. Hay que estudiar la continuidad de la función en x=0.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 4x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

La función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$

b)

$$f(x) = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$f(-x) = (-x)^3 e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = -x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} = -f(x)$$

La función presenta una simetría impar

c)

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

La integral $\int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ dx se resuelve con un cambio de variable

$$t = -\frac{1}{x^2}; dt = \frac{2}{x^3}dx; dx = \frac{x^3}{2}dt$$

$$\int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx = \int \frac{e^t}{x^3}\cdot\frac{x^3}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C$$

Sustituyendo, queda:

$$\int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{x^2}}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1}\right)$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Con un dispositivo láser situado en el punto P(1,1,1) se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones r ≡ $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$

a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano z= 0.
b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación x + y = 2 y la recta r.

a)

Vector director de r:

Pasar a ecuaciones paramétricas

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases}$$

Un vector de r puede ser $u_r = (1,2,1)$

Posición de la partícula

La posición será el punto de intersección entre la recta r y el plano z=0. Sustituyendo z=0 en r, se obtiene dicho punto.

$$I = (-90, -190, 0)$$

b)

Hay que calcular la distancia entre el punto P, que es donde está el láser, al punto más cercano de este, que es desconocido. Planteamos este como el punto $Q(x, 2x - 10, x + 90)$, que es cualquier punto de la recta r.

Como piden la posición más próxima, se están refiriendo a la distancia mínima. Por tanto, hay que plantear una función, derivarla e igualarla a 0. La función será la distancia entre los puntos P y Q.

$$f(x) = \sqrt{(1-x)^2 + (11-2x)^2 + (-x-89)^2} = \sqrt{6x^2 + 132x + 8043}$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12x + 132}{\sqrt{6x^2 + 132x + 8043}} = 0 \rightarrow x = -11$$

Se comprueba que x=-11 es un mínimo relativo.

$$f'(-12) < 0; f'(10) > 0$$

En el punto x=-11 hay un mínimo.

Por tanto, sustituyendo x=-11 en el punto Q, se obtiene la posición buscada.

$$Q(-11, -32{,}79)$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7%.

Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.
b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.
c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

a)

En este apartado se plantea una distribución binomial con n= 10 y probabilidad de éxito p=0,277.

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0{,}277^5 . 0{,}723^5 = 0{,}08112 = 8{,}112\%$$

b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}277^{10} . 0{,}723^0 \approx 0{,}9999 = 99{,}99\%$$

c)

Se aproxima la distribución binominal a una distribución normal

$$X \sim N\left(200 \cdot 0{,}277; \sqrt{200 \cdot 0{,}277 \cdot 0{,}723}\right)$$

$$X \sim N(55{,}4; 6{,}329)$$

$$P(X \geq 200 \cdot 0{,}35) = P(X \geq 70)$$

Aplicando la corrección de continuidad de Yates y redondeando por exceso, queda:

$$P(X \geq 69{,}5) = P\left(Z \geq \frac{69{,}5 - 55{,}4}{6{,}329}\right) = P(Z \geq 2{,}23) = 1 - P(Z \leq 2{,}23) = 1 - 0{,}9871 = 0{,}0129$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

El sistema de ecuaciones lineales que se obtiene de la información dada en el enunciado es:

$$\begin{cases} x+y-2z=3 \\ x+y+z=45 \\ 9450x-9450z=18900 \end{cases}$$

El resultado del sistema anterior es:

$$Sol\colon \begin{pmatrix} x=16 \\ y=15 \\ z=14 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, Pablo tiene 16 años, Alejandro tiene 15 años y Alicia tiene 14 años.
A Pablo le tocan 3360 euros; a Alejandro, 3150, y a Alicia, 2940.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función *f*(*x*) = $\frac{x}{x^2+1}$

a) (0.5 puntos) Compruebe si *f(x)* verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo [-1,1].
b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de *f(x)* en $\mathbb{R}$.
c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje OX en el intervalo [-1,1].

a) La función f(x) es continua en $\mathbb{R}$ y $f(-1)<0$ y $f(1)>0$, por lo tanto, debe existir un punto $c\in(-1,1)\colon\ f(c)=0$

b)

$$f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow x=1; x=-1$$

$f'(-2)<0; f'(0)>0\rightarrow$ Mínimo relativo en x=-1

$f'(0)>0; f'(2)<0\rightarrow$ Máximo relativo en x=1

c)

$$\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+1||_{-1}^{1}=\frac{1}{2}(\ln 2+\ln 2)=\ln 2\ uds^2$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi\equiv x+y+z=1$, la recta $r_1\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$ y el punto *P* (0,1,0)

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto *P* pertenece al mismo plano.
b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por *P* y sea perpendicular a r_1.
c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

a)

El punto *P* pertenece al plano π ya que sustituyendo en la ecuación del plano el punto *P*, se obtiene una igualdad correcta
Para comprobar si la recta r_1 está contenida en el plano π, se realiza el mismo procedimiento: se sustituyen las coordenadas de las ecuaciones paramétricas de r_1 en la ecuación del plano. Se obtiene una igualdad correcta.

b)

Como la recta debe estar contenida en el plano, su vector director será perpendicular al vector normal del plano. También debe ser perpendicular a la recta r_1. Basta con hacer el producto vectorial con el vector normal del plano y el vector director de r_1 para obtener el vector director de la recta que piden hallar.

$$\vec{n} = (1,1,1)$$
$$\overrightarrow{u_1} = (1,-1,0)$$
$$\vec{v} = |\vec{n} \times \overrightarrow{u_1}| = (1,1,-2)$$

Como la recta debe pasar por el punto *P*, se pueden plantear ya las ecuaciones paramétricas.

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$

c)

Como r_1 y r_2 deben ser paralelas:

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2} = (1,-1,0)$$

Además, r_2 pasa por el punto P, por lo tanto:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Para calcular el área de un cuadrado con cara en r_1 y r_2, hay que tener en cuenta que la recta *s* del apartado anterior es perpendicular a ambas rectas y que el punto de intersección entre *s* y r_2 es *P*. Para calcular el área del cuadrado basta con conocer un lado, este será el módulo del vector que una el punto *P* con el punto de intersección entre r_1 y *s*.
Se calcula el punto de intersección entre r_1 y *s*. Para ello se sustituyen las coordenadas de una de las rectas en la otra.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} ; \; s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = -2\mu \end{cases}$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES

$$\left.\begin{array}{r} 1+\lambda = \mu \\ 1-\lambda = 1+\mu \\ -1 = -2\mu \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{c} \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ \mu = \dfrac{1}{2} \end{array} \rightarrow \mathrm{I}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)$$

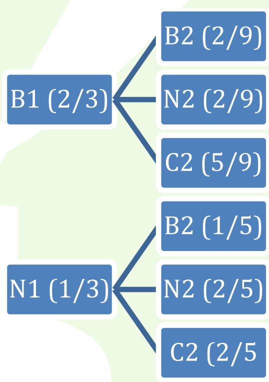
Con el punto de intersección ya se puede obtener el área.

$$\mathrm{A} = \left|\overrightarrow{\mathrm{PI}}\right|^2 = \left|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)\right|^2 = 1{,}5\ \mathrm{uds}^2$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.



a)

$$P(B_1 \cap N_2 \cup N_1 \cap B_2) = P(B_1).P(N_2|B_1) + P(N_1).P(B_2|N_1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5} = 0{,}2148$$

b)

$$P(B_1).P(N_2|B_1) + P(B_1).P(C_2|B_1) + P(N_1).P(B_2|N_1) + P(N_1).P(N_2|N_1) + P(N_1).P(C_2|N_1) = 0{,}851$$

c)

$$P(N_1|C_2) = P(N_1).P(B_2|N_1)/P(C_2) = 0{,}27$$
$$P(C_2) = P(N_1).P(C_2|N_1) + P(B_1).P(C_2|B_1) = 0{,}5037$$

© CENTRO DE ESTUDIOS LUIS VIVES